Kombinatorika letem světem
Odvození vzorců

Roman Biskup

Cílem tohoto textu je ozřejmění základních kombinatorických vztahů, jež mnozí znají ze střední školy, ale většinou je nedokáží používat již proto, že neví, kde se dané vztahy vzaly a „Proč se tam něco může opakovat a něco ne a někde je pořadí a někde je to bez pořadí, …“. V tomto textu většinu vztahů odvodíme a to na jednoduchých modelech.

Obsah

Základní kombinatorické principy

1.1 Princip bijekce

Princip bijekce je založen na vzájemně jednoznačném přiřazení prvků dvou množin. Jedna množina pro nás může být nepřehledná a vztahy v ní dokážeme těžko postihnout, zatímco druhá množina je pro nás přehledná a jsme na ní schopni daný problém vyřešit (ne nutně vždy kombinatorický problém). Známe-li tedy řešení na množině pro nás přehledné, známe i řešení na množině druhé. Kombinatoricky: *Má-li situace na jedné množině právě m řešení, pak stejná situace na vzájemně jednoznačně přiřazené množině (byť nepřehledné) má také m řešení.*

Vzájemně jednoznačné přiřazení znamená, že každému prvku z jedné množiny (označme ji A) odpovídá (je přiřazen) právě jeden prvek z množiny druhé (tu označme B). Pokud má existovat vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinami A a B, pak obě množiny musí být stejně početné, tj. $\#A = \#B$. Symbolem $\#A_i$ rozumíme kardinalitu (mohutnost) množiny A_i pro $i = 1, \dots, k$. Konkrétně pro nás se můžeme omezit na to, že budeme symbol $\#A$ chápat jako počet prvků množiny A.

S využitím tohoto principu můžeme například kombinatorické problémy převést na situace, kdy rozlišitelné objekty přiřazujeme přihrádkám (ať již rozlišitelným nebo nebo nerozlišitelným), ale o tom dále. S principem bijekce se setkáme také například při odvození vzorce (2.10) pro výpočet kombinací s opakováním, viz podkapitola 2.6.

1.2 Kombinatorické pravidlo o násobení

Předpokládejme, že máme vybrat k-tici prvků, přičemž první prvek této k-tice vybíráme z konečné neprázdné množiny, druhý z konečné neprázdné množiny, atd., až poslední, k-tý, vybíráme z konečné neprázdné množiny.

V případě, že výběr každého z prvků je nezávislý na výběru ostatních prvků, je celkem

$$\#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \ldots \cdot \#A_k \tag{1.1}$$

různých možností (k-tic), jak vybrat tyto prvky.

Výše uvedený vztah je, řekl bych, zřejmý, ale přece jen provedeme jeho přiblížení příkladem. Představme si, že máme jen dva druhy ponožek, troje kalhoty a dvě košile. Chceme-li zjistit kolika různými způsoby se můžeme obléci bez ohledu na módní trendy, pak uvažujeme asi následovně. Ke každému druhu ponožek si můžeme vzít jedny z trojice kalhot. K jedné kombinaci kalhot s ponožkami si můžeme vzít jednu ze dvojice košil. Kolik je to možností? Právě 12. Konstrukci kombinací ukazuje následující rozhodovací strom na obrázku (viz obrázek 1.1). Výše uvedený vztah je jen zobecněním tohoto příkladu.

1. druh ponožek	1. kalhoty	1.košile	1.
		2.košile	2.
	2. kalhoty	1.košile	3.
		2.košile	4.
	3. kalhoty	1.košile	5.
		2.košile	6.
2. druh ponožek	1. kalhoty	1.košile	7.
		2.košile	8.
	2. kalhoty	1.košile	9.
		2.košile	10.
	3. kalhoty	1.košile	11.
		2.košile	12.
$2\times$	$3\times$	$2\times$	$= 12$

Obrázek 1.1: Rozhodovací strom pro výběr oblečení (různé kombinace)

1.3 Kombinatorické pravidlo o součtu

Předpokládejme, že máme k-tici disjunktních množin[1], potom sjednocení těchto množin, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ má právě $\#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_k$ prvků, tj.:

$$\#\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_k. \tag{1.2}$$

[1] disjunktní množiny jsou takové množiny, jenž mají po dvou prázdný průnik, tj. množiny A_i, pro $i = 1, \ldots, k$ jsou disjunktní $\Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $i, j = 1, \ldots, k$

Uvědomte si, že podmínka disjunktnosti je podstatná. Uvažujeme pro jednoduchost dvě nedisjunktní množiny $A_{\maltese} = \{m, o, s, t\}$ a $A_{\bowtie} = \{k, o, s, t\}$, jenž mají shodně 4 prvky. Sjednocení množin $A_{\maltese} \cup A_{\bowtie}$ má pouze 5 prvků ($\{m, o, s, t, k\}$). Kdybychom zapomněli na podmínku disjunktnosti a jen tupě dosadili do vzorce výše (1.2), dostali bychom nesprávný výsledek 8 prvků ($4+$ $+ 4$). Jak se vypořádat s případem, kdy o disjunktnosti nelze rozhodnout, si ukážeme v následující oddíle (oddíl 1.4).

1.4 Princip exkluze a inkluze

Pro začátek uvažujme opět množiny $A_{\bowtie}$ a $A_{\maltese}$ definované výše. Uvědomme si, že pokud sečteme počet prvků obou množin, chováme se tak, jako kdybychom do sjednocení zařadili všechny prvky, což je ve sporu s definicí množiny, neboť jsme některé prvky zařadili do sjednocení množin $A_{\maltese} \cup A_{\bowtie}$ dvakrát. Je zřejmé, že právě společné prvky jsou „problémové“. Společné prvky, jsou, jak jistě víte, právě všechny prvky průniku $A_{\maltese} \cap A_{\bowtie}$, tj. $A_{\maltese} \cap A_{\bowtie} =$ $= \{o, s, t\}$. Protože prvky průniku jsme prostým součtem počtů prvků množin $A_{\bowtie}$ a $A_{\maltese}$ započetli dvakrát, jednou s množinou $A_{\maltese}$ a podruhé s množinou $A_{\bowtie}$, stačí od prostého součtu prvků množin odečíst počet prvků jejich průniku:

$$\#(A_{\maltese} \cup A_{\bowtie}) = \#A_{\maltese} + \#A_{\bowtie} - \#(A_{\maltese} \cap A_{\bowtie}). \tag{1.3}$$

Nyní se podívejme jak to vypadá v případě 3 množin A_1, A_2 a A_3. Zkusme aplikovat postup popsaný výše a od celkového součtu prvků množin A_1, A_2 a A_3 odečíst počty prvků jednotlivých průniků $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ a $A_2 \cap A_3$. Tím jsme se sice zbavili navíc napočtených prvků průniků. Co se však stalo s průnikem všech třech množin $A_1 \cap A_2 \cap A_3$? Prostým součtem byl na začátku počet prvků průniku $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ zahrnut třikrát. Následně byl zase třikrát odečten. Proto musíme počet prvků průniků $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ přičíst:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad = \quad & \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \\ & -\#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_3) + \\ & +\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pro snažší pochopení zápisu počtu prvků sjednocení pro obecně k nedisjunktních množin přepíšeme výraz (1.4) s využitím sumačního symbolu a symbolu sjednocení přes indexovou množinu:

$$\#\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \sum_{i=1}^{3} \#A_i - \sum_{i \neq j} \#(A_i \cap A_j) + \#\bigcap_{i=1}^{3} A_i. \tag{1.5}$$

Pro k množin $A_1, \dots, A_k$ ne nutně disjunktních můžeme počet prvků tohoto sjednocení $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ vypočíst podle následujícího vzorce:

$$\begin{aligned} \# \textstyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad = \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{k} \# A_i - \sum_{i \neq j} \# (A_i \cap A_j) + \\ & + \textstyle\sum_{i \neq j \neq l} \# (A_i \cap A_j \cap A_l) + \dots \\ & + (-1)^{k-1} \cdot \# \textstyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Předpis (1.6) říká: „Sečti počty prvků všech množin a odečti od nich počty prvků všech různých průniků dvou množin. K výsledku přičti počty prvků všech různých průniků tří množin a tak dále, až nakonec k výsledku přičti respektive odečti počet prvků průniku všech k množin“. Ve vzorci je pomocí výrazu $(-1)^{k-1}$ ošetřeno to, aby se znaménka pravidelně střídala a poslední člen vzorce (1.6) do této řady zapadl.

Následující vzorec (1.7) shrnuje v poměrně krátkém zápise rozepsaný vzorec (1.6). Podle mého soudu je však méně přehledný. Pokuste se však nahlédnout, že jeho zápis je korektní:

$$\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,\dots,k\}} (-1)^{(\# I - 1)} \cdot \# \bigcap_{i=1}^{k} A_i. \tag{1.7}$$

Dále si uvědomte, že vzorec (1.2) a vzorce (1.3) až (1.7) jsou ve shodě. Je-li splněna podmínky disjunktnosti množin, jsou všechny průniky prázdné a tudíž je jejich kardinalita nulová.

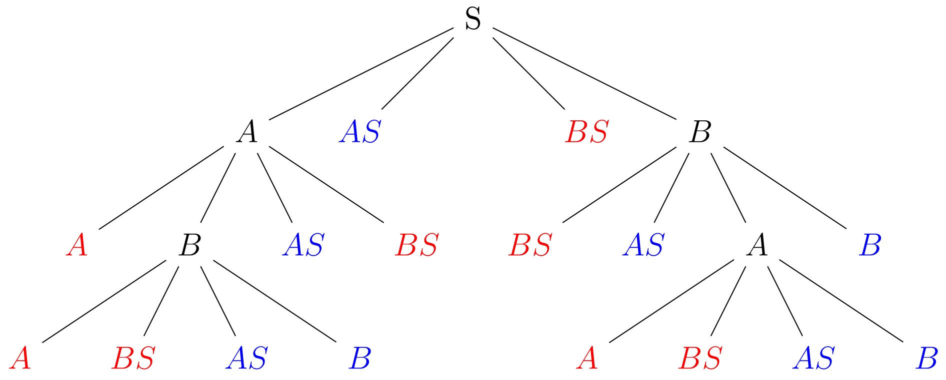
1.5 Princip logického stromu

Při odvozování kombinatorického pravidla (podkapitola 1.2 o násobení jsme se k výsledku dostali prostřednictvím zjištěním počtu všech možných výsledku. Na příkladě bylo ukázáno jak obecně dojít k výsledku shrnutého ve vzorci (1.1). Pro přehlednost byl výčet uspořádán do logického stromu, jehož jednotlivé úrovně reprezentovali rozhodnutí dalšího oblečení (ponožek, kalhot a košil). Tento strom byl svým způsobem „ideální“. Na každé úrovni byl „rovnoměrně“ rozvětvený.

Uvažme však jiný případ, který již nebude tak „symetrický“. Jak může proběhnout tenisové utkání, které se hraje na dva vyhrané sety. Každý set tedy může vyhrát hráč A nebo hráč B. A aby to nebylo tak jednoduché uvažme, že hráč A či hráč B může odstoupit, tj. utkání skrečovat. První set tedy může vyhrát hráč A nebo hráč B a utkání pokračuje, nebo vzdá hráč

A nebo B a utkání končí. Po druhém setu utkání skončí jen v případě, že vyhrál stejný hráč jako v setu prvním, nebo opět někdo skrečuje. To se to komplikuje, že? Pojďme možné výsledky uspořádat do logického stromu, kde A bude znamenat vítězství hráče A, AS skreč hráče A u hráče B obdobně.

Obrázek 1.2: Logický strom výsledků tenisového zápasu



Spojnice mezi jednotlivými stavy nazýváme větve a stavy, které jsou konečné, pak listy. Listy na obrázku 1.2, které jsou červené, zobrazují výsledek, který skončil vítězstvím hráče A, modré pak symbolizují vítězství hráče B. Počet listů (16) je počtem všech možných výsledků tenisového zápasu. V polovině vyhrává hráč A v polovině hráč B.

Kombinatoricky: *Počet různých řešení dané situace zaznamenávané prostřednictvím logického stromu je roven počtu listů tohoto stromu.* Jistě Vás napadnou i jiné způsoby využití logického stromu (výsledky her, vícekolové rozhodování, ...).

Permutace, variace a ty další

Pro konstrukci variací, permutací a kombinací, tak jak je znáte, využijeme následující modelovou úlohu:

> Mějme n, u některých příkladů l, rozlišitelných předmětů, které chceme po jednom umístit do k přihrádek.

Otázkou je, kolika různými způsoby to lze učinit. S ohledem na to, zda nás zajímá pořadí přihrádek, tj. přihrádky jsou rozlišitelné, a zda se rozlišitelné předměty vyskytují současně ve více přihrádkách, tj. máme-li více předmětů stejného druhu, vytvoříme několik modelů, kterými se budeme snažit ozřejmit pro mnohé tajemné „kombinatorické vzorečky“.

2.1 Rozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se neopakují

Mějme n rozlišitelných předmětů, jež chceme umístit do k očíslovaných přihrádek a to tak, že do každé přihrádky jen jeden předmět. Dále předpokládejme, že každý předmět máme jen jednou. Pak je zřejmé, že do první přihrádky můžeme umístit jeden z n předmětů, které máme. Do druhé přihrádky již můžeme umístit jen $n-1$ předmětů, protože jsme již jeden vyčerpali. Do poslední k-té přihrádky pak můžeme vybírat jen z $n-k+1$ předmětů, jež nám zbyly. Z tohoto důvodu je rozumné požadovat, abychom měli více, nebo alespoň stejně předmětů jako přihrádek, tedy $n \geq k$[1].

1	2	3	...	$k-1$	k
n	$n-1$	$n-2$	...	$n-k+2$	$n-k+1$

S odvoláním na pravidlo o násobení 1.2 můžeme vyjádřit počet způsobů, jimiž lze danou úlohu vyřešit a stanovit výsledek:

[1] V případě, kdyby bylo přihrádek více než objektů, tj. $n \leq k$, se úloha převádí na přiřazení přihrádek předmětům.

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k). \tag{2.1}$$

To odpovídá následujícímu zápisu, ve kterém využíváme faktoriály čísel:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.2}$$

Uvědomte si, ze jsme právě odvodili vzorec pro počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování.

2.2 Rozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se neopakují $*$

Speciálním typem předcházející úlohy je případ, kdy je počet rozlišitelných předmětů stejný jako počet očíslovaných přihrádek. Tento společný počet označme, jak bývá zvykem, n. Pak je zřejmé, že do první přihrádky můžeme umístit jeden z n předmětů, které máme. Do druhé přihrádky můžeme umístit jen $n-1$ předmětů, protože jsme již jeden vyčerpali. Do poslední n-té přihrádky již nemůžeme vybírat a dáme tam ten, jež nám zbyl.

1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n
n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	2	1

S odvoláním na pravidlo o násobení 1.2 můžeme vyjádřit počet způsobů, jimiž lze danou úlohu vyřešit a stanovit výsledek:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad \big(= V_n(n)\big). \tag{2.3}$$

To odpovídá následujícímu zápisu, ve kterém využíváme faktoriál:

$$P(n) = n! \qquad \big(= V_n(n)\big). \tag{2.4}$$

Uvědomte si, ze jsme právě odvodili vzorec pro počet permutací n prvků (bez opakování).

2.3 Rozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se mohou opakovat

Mějme n rozlišitelných předmětů, jež chceme umístit do k očíslovaných přihrádek. Dále předpokládejme, že každý předmět máme tolikrát, že bychom s ním mohli zaplnit všechny přihrádky. Pak je zřejmé, že do první přihrádky můžeme umístit jeden z n druhů předmětů, které máme. Do druhé přihrádky můžeme umístit opět n předmětů různého druhu, protože jich máme dostatek, aby se mohli opakovat. Do poslední k-té přihrádky můžeme vybírat stále z n druhů předmětů z toho samého důvodu.

1	2	3	...	$k-1$	k
n	n	n	...	n	n

S odvoláním na pravidlo o násobení 1.2 můžeme vyjádřit počet způsobů, jimiž lze danou úlohu vyřešit a stanovit výsledek:

$$V_k^*(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\times}. \tag{2.5}$$

To odpovídá následujícímu zápisu:

$$V_k^*(n) = n^k. \tag{2.6}$$

Uvědomte si, ze jsme právě odvodili vzorec pro počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním.

2.4 Rozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se opakují $*$

Speciálním typem předcházející úlohy je případ, kdy každý z předmětů máme tolikrát, že s ním sice nemůžeme zaplnit všechny přihrádky. Celkem však máme právě tolik předmětů kolik je přihrádek. Počet přihrádek označme, jak bývá zvykem, n. Počet různých druhů předmětů označme l. V souvislosti předchozím jistě platí: $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$, kde n_i pro $i = 1, \ldots, l$ jsou počty jednotlivých druhů předmětů. Konstrukce, jíž bychom došli k správnému výsledku vychází z myšlenky použité v jednom z následujících oddílů (viz oddíl 2.5).

Zkuste si odvození rozmyslet sami a uvědomte si, že princip použitý ke kompenzaci výpočtu u úlohy 2.5 lze jen opakovaně použit pro všech l druhů předmětů. Vycházejte z výpočtu pro permutace bez opakování.

$$P^*(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!}. \tag{2.7}$$

Uvědomte si, že jsme právě odvodili vzorec pro počet permutací n prvků s opakováním.

2.5 Nerozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se neopakují

Mějme n rozlišitelných předmětů, jež chceme umístit do k nerozlišitelných přihrádek. Dále předpokládejme, že každý předmět máme jen jednou a ve skutečnosti nás zajímá, jen jaké předměty vybereme, neboť přihrádky jsou nerozlišitelné. Z tohoto důvodu je rozumné požadovat, abychom měli více, nebo alespoň stejně předmětů jako je přihrádek, tedy $n \geq k$. Vyjdeme z modelu 2.1 a vzorec upravíme, tak aby vyhovoval této specifikaci. Uvědomte si, že v případu 2.1 záleželo na pořadí a proto jsme do výsledků zahrnovali všechny možné permutace výběru se stejnými předměty. Kdybychom měli například jen tři přihrádky a do nich umísťovali symboly $\clubsuit$, $\spadesuit$ a $\heartsuit$. Pak bychom dostali jako různá řešení všechny jejich permutace, tj.:

1.	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
2.	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
3.	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
4.	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
5.	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
6.	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$

Tyto případy, jež byly z hlediska úlohy 2.1 různé, se v případě neočíslovaných přihrádek neliší, neboť nezáleží na pořadí. Těchto případů je pro k přihrádek právě $k!$, neboť se jedná o permutace n prvků bez opakování, viz oddíl 2.2. To znamená, že hodnota vypočtená podle vzorce (2.2) je $k!$ krát větší než hodnota, kterou chceme spočítat. Proto $V_k(n)$ vydělíme $k!$ a získáme počet způsobů, jimiž lze úlohu 2.5 vyřešit:

$$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}. \tag{2.8}$$

To odpovídá následujícímu zápisu, ve kterém využíváme kombinačních čísel:

$$C_k(n) = \binom{n}{k}. \tag{2.9}$$

Uvědomte si, ze jsme právě odvodili vzorec pro počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování.

2.6 Nerozlišitelné přihrádky a rozlišitelné předměty, jež se mohou opakovat

Mějme n druhů rozlišitelných předmětů, jež chceme umístit do k přihrádek. Dále předpokládejme, že každý předmět máme tolikrát, že bychom s ním mohli zaplnit všechny přihrádky (tj. počet předmětů jednoho druhu je větší nebo roven než počet přihrádek). Ve skutečnosti nás zajímá, jen jaké předměty vybereme a kolikrát. Pro rozřešení této úlohy je využito pěkného nápadu se zakódováním každého možného výběru (vzpomeňte na princip bijekce – podkapitola **??**).

Představte si, že máte k dispozici „basu“[2]. Ve Vašem oblíbeném obchodu je k dispozici 5 druhů piva. Řekněme Budvar, Staropramen, Plzeň, Nektar a Krušovice. Basu můžete z pohledu konzumenta naplnit mnoha způsoby. Kolika? Na to budete schopni za chvíli schopni odpovědět. Některými z možných nákupů jsou například (viz tabulka níže):

Případ	Budvar	Staropramen	Plzeň	Nektar	Krušovice
1.	20	0	0	0	0
2.	4	4	4	4	4
3.	2	0	3	10	5
4.	0	12	0	8	0
5.	3	5	3	4	5
6.	1	7	0	6	6
⋮					

Představte si, že jste si vybrali a rádi by jste sdělili někomu blízkému z čeho, že si večer bude moci vybrat. Jelikož jste oba (obě) ve skrze hravé osoby nebojící se výzev, rozhodli jste se skladbu večerní rehydratace popsat jen pomocí, dejme tomu, fazolí a zápalek. Nebudu Vás dlouho napínat a prozradím Vám, že pro takovéto popsání budete potřebovat právě 20 fazolí a 4 zápalky. Domluva je následující:

1. Předměty budete skládat do řady za sebe.
2. Každá z fazolí představuje jednu láhev s pivem[3].
3. Každá zápalka představuje oddělovač mezi druhy piv. Vzhledem k tomu, že předměty skládáme v řadě stačí nám o jednu zápalku méně než máme

[2]V tomto kontextu: Basa = plastová přepravka na láhve s pivem respektive od piva, do které se obvykle vejde 20 již zmíněných lahví.

[3]Předpokládejme, že obsah bude skutečně konzumován až večer.

druhů piv. Tj. fazole před 1. zápalkou reprezentují jeden druh piva, fazole za 1. a před 2. zápalkou reprezentují druhý druh piva. A tak stále dál, až fazole za 4. zápalkou reprezentují pátý druh piva.

4. Druhy piv mají v našem zakódování pevně dané pořadí Budvar, Staropramen, Plzeň, Nektar a nakonec Krušovice.

Jak tedy budou vypadat jednotlivá zakódování počtů piv uvedených možných řešeních? Přesně v souladu s vytvořenou úmluvou jsou vidět na následujícím obrázku zakódování prvních čtyř z výše uvedených možných nákupů.

Případy
1. ǫ | | | |
2. ǫ ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ
3. ǫ ǫ | | ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ | ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ
4. | ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ | | ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ ǫ |
⋮

Naopak z tohoto zakódování jasně vidíme, že v 1. případě bylo koupeno 20 Budvarů a žádné jiné pivo, v 2. případě byly koupeny 4 Budvary, 4 Staroprameny, 4 Plzně, 4 Nektary a 4 Krušovice. Ve 3. případě se jedná o 2 Budvary, žádný Staropramen, 3 Plzně, 10 Nektarů a 5 Krušovic. Ostatní nepopsané příklady jsou nechány laskavému čtenáři k procvičení kódovacího algoritmu.

Opusťme však pro tuto chvíli pivní tématiku a vraťme se zpět k obecnému příkladu. Využijeme-li poznatky z předchozího kódování, vidíme, že každý z kódů obsahoval právě $n+k-1$ pozic. k pozic pro počet vybíraných předmětů a $n-1$ pozic pro oddělovníky druhů. Vzhledem k tomu, že proces kódování je vzájemně jednoznačný, pak možných řešeních je právě tolik, kolik je různých kódů. Konečně, různých kódů je tolik, kolika způsoby lze různě umístit $n-1$ nerozlišitelných oddělovníků druhů na $n+k-1$ rozlišitelných pozic, respektive je třeba vybrat $n-1$ pozic bez ohledu na pořadí, neboť na ně budeme umísťovat nerozlišitelné oddělovníky, z $n+k-1$ všech možných. Pečlivý čtenář již jistě poznal, že vhodným zakódováním jsme tuto úlohu převedli na úlohu 2.5, tj. kombinace bez opakování. Po dosazení do vzorce (2.9) získáváme vzorec pro počet způsobů, jimiž lze tuto úlohu vyřešit a stanovit výsledek:

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{n-1} \tag{2.10}$$

Uvědomte si, ze jsme právě uvedli vzorec pro počet kombinací k-té třídy n prvků s opakováním.

Vrátíme-li se k ilustračnímu příkladu, jistě již nebude problém spočítat, kolika způsoby lze různě naplnit basu z pohledu uživatele, kterého zřejmě obsah lahví zajímá více než jejich umístění[4].

[4] pro jistotu výsledek je $\binom{24}{19} = 42\,504$

Shrnutí

Obecné pojmenování	výpočetní vzorec	odkaz
Faktoriál čti [en faktoriál]	$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$	
Kombinační číslo čti [en nad ká]	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	
Komb. princip o násobení	$\#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \ldots \cdot \#A_k$	1.2
Komb. princip o součtu	$\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \#A_1 + \ldots + \#A_k$	1.3
Princip exkluze a inkluze	$\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,\ldots,k\}} (-1)^{(\#I-1)} \cdot \# \bigcap_{i=1}^{k} A_i$	1.4
Variace k-té třídy z n prvků bez opakování	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	2.1
Variace k-té třídy z n prvků s opakováním	$V_k^*(n) = n^k$	2.3
Permutace n prvků	$P(n) = n!$	2.2
Permutace n prvků s opako- váním	$P^*(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!}$	2.4

Obecné pojmenování	výpočetní vzorec	odkaz
Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	2.5
Počet kombinací k–té třídy z n prvků s opakováním	$C^*_k(n) = \binom{n+k-1}{n-1}$	2.6

Závěr

Předchozí shrnutí je jen formálním utříděním informací a pokud si budete chtít vystačit jen s touto tabulkou, tak pro Vás platí to, co pro toho, jenž právě začal číst tento text, tj. „zmatek v tom, proč se tam něco muže opakovat a něco ne a někde je poradí a někde je to bez poradí, . . . “ Z výše uvedeného důvodu není součástí tabulky vysvětlení použitých symbolu, neboť tabulka sama o sobě není bez pochopení stěžejní.

Doufám, že Vám tento text pomůže v pochopení elementární kombinatoriky. Řešení příkladů ze skript, jež lze s využitím tohoto aparátu zvládnout, pro Vás bude již hračkou.

autor