

Základy teorie pravděpodobnosti

Kombinatorika – Kombinatorická pravidla

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012



Obsah

Úvod

Faktoriál a kombinační číslo

Kombinatorické principy

Kombinatorické vzorečky

Variace

Permutace

Kombinace



Úvod

- ▶ Kombinatorika je část finitní (konečné) matematiky zabývající zejména se stanovováním počtu možností, jimiž lze přesně definovaným způsobem nakládat s konečným počtem objektů.
- ▶ Kombinatorika je těsně svázána s dalšími oblastmi matematiky: pravděpodobnost (viz klasická definice pravděpodobnosti), teorie grafu, atp.
- ▶ Kombinatorická pravidla – pravidla (vzorce), pomocí nichž lze vypočítat, kolika způsoby je možné (nejčastěji) z n objektů vybrat k -tici přesně definovaným způsobem.



Faktoriál a kombinační číslo

$n!$ Faktoriál – čti [en faktoriál]; $n \in \mathbb{N}_0$

- ▶ $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1,$
- ▶ $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad \dots$

$\binom{n}{k}$ Kombinační číslo – čti [en nad ká]; $n, k \in \mathbb{N}_0, \quad n \geq k \geq 0$

- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
- ▶ Vztahy mezi kombinačními čísly
 - ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
 - ▶ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$
 - ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$
 - ▶ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

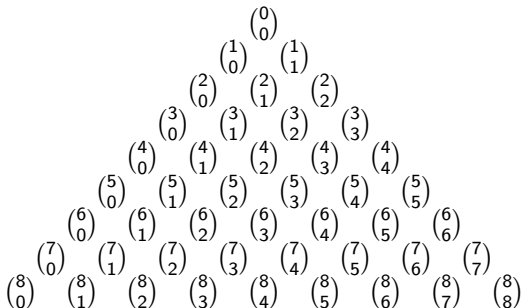


Pascalův trojúhelník I

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10	5		1
	1	6	15		20		15	6	1
	1	7	21	35		35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1	



Pascalův trojúhelník II



Kombinatorické principy I

► Princip bijekce

- Existuje-li vzájemně jednoznačné přiřazení objektů mezi dvěma množinami, pak má-li situace na jedné množině právě m řešení, pak stejná situace na vzájemně jednoznačně přiřazené množině (byť nepřehledné) má také m řešení.

► Kombinatorický princip o násobení

- počet různých k -tic, přičemž první člen k -tice je vybírán z n_1 prvků, druhý z n_2 prvků a konečně k -tý z n_k – všechny výběry jsou vzájemně nezávislé – je
- $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

► Kombinatorický princip o součtu

- počet prvků ve sjednocení disjunktních množin je

$$\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \#A_1 + \dots + \#A_k$$

► Princip exkluze a inkluze

- počet prvků ve sjednocení ne nutně disjunktních množin je

$$\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{(\#I-1)} \cdot \# \bigcap_{i=1}^k A_i$$

- pro dvě množiny: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$



Kombinatorické principy II

- ▶ Princip logického stromu
 - ▶ Počet různých řešení dané situace zaznamenávané prostřednictvím logického stromu je roven počtu listů tohoto stromu.



Variace

Rozlišitelné předměty, rozlišitelné přihrádky

$V_k(n)$ Variace k -té třídy z n prvků bez opakování

- ▶ počet různých k -tic z n rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků v dané k -tici a žádný prvek se neopakuje; zřejmě $n \geq k$
- ▶
$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$V_k^*(n)$ Variace k -té třídy z n prvků s opakováním

- ▶ počet různých k -tic z n druhů rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků v dané k -tici a od každého druhu je tolik předmětů, že by s nimi bylo možno naplnit celou k -tici
- ▶
$$V_k^*(n) = n^k$$



Permutace

Rozlišitelné předměty, rozlišitelné přihrádky

$P(n)$ Permutace n prvků bez opakování

- ▶ počet různých n -tic rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků a žádný prvek se neopakuje
- ▶ $P(n) = n!$

$P^*(n)$ Permutace n prvků s opakováním

- ▶ počet různých n -tic předmětů takových, že záleží na pořadí prvků a n prvků je rozděleno do k skupin tak, že v i -té skupině, $i = 1, \dots, k$ je n_i nerozlišitelných předmětů (pro $i = 1, \dots, k$); tj. $\sum_{i=1}^k n_i = n$
- ▶
$$P^*(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$



Kombinace

Rozlišitelné předměty, nerozlišitelné přihrádky

$C_k(n)$ Počet kombinací k -té třídy z n prvků bez opakování

- ▶ počet různých k -tic z n rozlišitelných předmětů takových, že nezáleží na pořadí prvků v dané k -tici a žádný prvek se neopakuje; zřejmě $n \geq k$
- ▶ $C_k(n) = \binom{n}{k}$

$P^*(n)$ Permutace n prvků s opakováním

- ▶ Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním
~> počet různých k -tic z n druhů rozlišitelných předmětů takových, že nezáleží na pořadí prvků v dané k -tici a od každého druhu je tolik předmětů, že by s nimi bylo možno naplnit celou k -tici
- ▶ $C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{n-1}$

