

Základy teorie pravděpodobnosti

Kombinatorika – Kombinatorická pravidla

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012



Úvod

- ▶ Kombinatorika je část finitní (konečné) matematiky zabývající zejména se stanovováním počtu možností, jimiž lze přesně definovaným způsobem nakládat s konečným počtem objektů.
- ▶ Kombinatorika je těsně svázána s dalšími oblastmi matematiky: pravděpodobnost (viz klasická definice pravděpodobnosti), teorie grafu, atp.
- ▶ Kombinatorická pravidla – pravidla (vzorce), pomocí nichž lze vypočítat, kolika způsoby je možné (nejčastěji) z n objektů vybrat k -tici přesně definovaným způsobem.



Obsah

Úvod

Faktoriál a kombinační číslo

Kombinatorické principy

Kombinatorické vzorečky

Variace

Permutace

Kombinace



Faktoriál a kombinační číslo

$n!$ Faktoriál – čti [en faktoriál]; $n \in \mathbb{N}_0$

- ▶ $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$,
- ▶ $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

$\binom{n}{k}$ Kombinační číslo – čti [en nad ká]; $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k \geq 0$

- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
- ▶ Vztahy mezi kombinačními čísly
 - ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
 - ▶ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
 - ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
 - ▶ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.



Pascalův trojúhelník I

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
	1	5	10		10		5		1
	1	6	15	20		15	6		1
1	7	21	35		35	21	7		1
1	8	28	56	70		56	28	8	1



Kombinatorické principy I

- ▶ Princip bijekce
 - ▶ Existuje-li vzájemně jednoznačné přiřazení objektů mezi dvěma množinami, pak má-li situace na jedné množině právě m řešení, pak stejná situace na vzájemně jednoznačně přiřazené množině (byť nepřehledné) má také m řešení.
- ▶ Kombinatorický princip o násobení
 - ▶ počet různých k -tic, přičemž první člen k -tice je vybírán z n_1 prvků, druhý z n_2 prvků a konečně k -tý z n_k – všechny výběry jsou vzájemně nezávislé – je $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$
- ▶ Kombinatorický princip o součtu
 - ▶ počet prvků ve sjednocení disjunktních množin je
 - ▶ $\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \#A_1 + \dots + \#A_k$
- ▶ Princip exkluze a inkluze
 - ▶ počet prvků ve sjednocení ne nutně disjunktních množin je
 - ▶ $\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \cdot \# \bigcap_{i \in I} A_i$ $I \subseteq \{1, \dots, k\}$
 - ▶ pro dvě množiny: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$



Pascalův trojúhelník II

										$\binom{0}{0}$									
									$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$								
								$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$							
							$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$						
						$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$					
					$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$				
			$\binom{6}{0}$		$\binom{6}{1}$		$\binom{6}{2}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{6}{4}$		$\binom{6}{5}$		$\binom{6}{6}$				
		$\binom{7}{0}$		$\binom{7}{1}$		$\binom{7}{2}$		$\binom{7}{3}$		$\binom{7}{4}$		$\binom{7}{5}$		$\binom{7}{6}$		$\binom{7}{7}$			
$\binom{8}{0}$		$\binom{8}{1}$		$\binom{8}{2}$		$\binom{8}{3}$		$\binom{8}{4}$		$\binom{8}{5}$		$\binom{8}{6}$		$\binom{8}{7}$		$\binom{8}{8}$			



Kombinatorické principy II

- ▶ Princip logického stromu
 - ▶ Počet různých řešení dané situace zaznamenávané prostřednictvím logického stromu je roven počtu listů tohoto stromu.



Variace

Rozlišitelné předměty, rozlišitelné přihrádky

$V_k(n)$ Variace k -té třídy z n prvků bez opakování

- ▶ počet různých k -tic z n rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků v dané k -tici a žádný prvek se neopakuje; zřejmě $n \geq k$
- ▶ $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$V_k^*(n)$ Variace k -té třídy z n prvků s opakováním

- ▶ počet různých k -tic z n druhů rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků v dané k -tici a od každého druhu je tolik předmětů, že by s nimi bylo možno naplnit celou k -tici
- ▶ $V_k^*(n) = n^k$



Permutace

Rozlišitelné předměty, rozlišitelné přihrádky

$P(n)$ Permutace n prvků bez opakování

- ▶ počet různých n -tic rozlišitelných předmětů takových, že záleží na pořadí prvků a žádný prvek se neopakuje
- ▶ $P(n) = n!$

$P^*(n)$ Permutace n prvků s opakováním

- ▶ počet různých n -tic předmětů takových, že záleží na pořadí prvků a n prvků je rozděleno do k skupin tak, že v i -té skupině, $i = 1, \dots, k$ je n_i nerozlišitelných předmětů (pro $i = 1, \dots, k$); tj. $\sum_{i=1}^k n_i = n$
- ▶ $P^*(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$



Kombinace

Rozlišitelné předměty, nerozlišitelné přihrádky

$C_k(n)$ Počet kombinací k -té třídy z n prvků bez opakování

- ▶ počet různých k -tic z n rozlišitelných předmětů takových, že nezáleží na pořadí prvků v dané k -tici a žádný prvek se neopakuje; zřejmě $n \geq k$
- ▶ $C_k(n) = \binom{n}{k}$

$P^*(n)$ Permutace n prvků s opakováním

- ▶ Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním
 $\rightsquigarrow$ počet různých k -tic z n druhů rozlišitelných předmětů takových, že nezáleží na pořadí prvků v dané k -tici a od každého druhu je tolik předmětů, že by s nimi bylo možno naplnit celou k -tici
- ▶ $C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{n-1}$

