

Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodný jev – Pravděpodobnost náhodného jevu

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

15. srpna 2012



Děj – pokus – jev

Teorie pravděpodobnosti se zabývá zákonitostmi náhody (hromadnými stochastickými ději)

hromadný stochastický děj děj, jenž nemusí mít vždy stejný výsledek, i když probíhá v komplexu stejných podmínek

náhodný pokus děj, jenž probíhá v komplexu stejných podmínek

náhodný jev pojmenování hromadného stochastického děje zkoumaného z kvantitativního pohledu (šance s jakou může děj nastat)

deterministický děj děj se známým, předem očekávaným výsledkem



Obsah

Definice pojmů

Náhodný jev

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost náhodného jevu

Definice pravděpodobnosti

Vlastnosti pravděpodobnosti náhodného jevu

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost jevů

Celková a Bayesova pravděpodobnost



Pravděpodobnost

Pravděpodobnost – míra „možnosti“ [likelihood], že daný náhodný jev nastane

- ▶ axiomatická definice pravděpodobnosti
- ▶ empirické zavedení (návod jak počítat)
 - ▶ Klasická definice pravděpodobnosti
 - ▶ Statistická definice pravděpodobnosti
 - ▶ Geometrická definice pravděpodobnosti



Pravděpodobnostní prostor

- Ω pravděpodobnostní prostor
 - $\rightsquigarrow$ množina všech možných výsledků náhodného pokusu (konečná, nekonečná i nespočetná)
- ω elementární jevy
 - $\rightsquigarrow$ prvky pravděpodobnostního prostoru ($\omega \in \Omega$)
- A (složený) jev
 - $\rightsquigarrow$ podmnožiny pravděpodobnostního prostoru ($A, B, \dots \subset \Omega, \omega \in A, B, \dots$)



Základní vztahy a operace mezi jevy II

Množinové pojetí

- $B - A$ rozdíl jevů A a B
 - $\rightsquigarrow$ nastane jev B a zároveň nenastane jev A ($B - A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B \wedge \omega \notin A\}$)
- A^c opačný jev k jevu A
 - $\rightsquigarrow$ nastanou všechny elementární jevy neobsažené v jevu A ($A^c = \Omega - A = \{\omega \in \Omega : \forall \omega \notin A \Rightarrow \omega \in A^c\}$)
- $A \cap B = \emptyset$ A a B jsou jevy neslučitelné (vzájemně se vylučující)
 - $\rightsquigarrow$ jevy A a B nemohou nastat současně
- $A_j \cap A_k = \emptyset$ platí pro $j, k = 1, \dots, n, i \neq j$ pak jevy $A_1, \dots, A_n$ nazýváme jevy párově neslučitelné
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = B$ jsou-li jevy $A_1, \dots, A_n$ párově neslučitelné a zároveň platí, že $\bigcup_{i=1}^n A_i = B$, pak $A_1, \dots, A_n$ tvoří rozklad jevu B
- Ω jev jistý (jev s pravděpodobností 1)
- $\emptyset$ jev nemožný (jev s pravděpodobností 0 **Pozor: $\Rightarrow$, ale ne $\Leftarrow$**)



Základní vztahy a operace mezi jevy I

Množinové pojetí

Nechť Ω je pravděpodobnostní prostor a $A, B, \dots$, respektive $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou jevy na tomto prostoru, a zápis $\omega \in A$ znamená, že jev A nastal pak:

- $A \subset B$ jev A je podjevem jevu B
 - $\rightsquigarrow$ nastal-li jev A nastane i jev B , nenastal-li jev B nenastane ani jev A ($A \subset B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \Rightarrow \omega \in B\}$)
- $A = B$ jev A je totožný (ekvivalentní) s jevem B
 - $\rightsquigarrow$ $A \subset B \wedge B \subset A$
- $A \cup B$ sjednocení jevů A a B
 - $\rightsquigarrow$ nastane alespoň jeden z jevů A nebo B ($A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$)
- $A \cap B$ průnik jevů A a B
 - $\rightsquigarrow$ nastanou oba jevy A a B **současně** ($A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$)



Axiomatická definice pravděpodobnosti

Definice pravděpodobnosti

Uvažujme neprázdný pravděpodobnostní prostor Ω a σ -algebru jeho podmnožin $\mathcal{A}$. Pak P je míra definovaná na $(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že

- i $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$;
- ii $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \in \langle 0; 1 \rangle$;
- iii $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$, pro $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$.

Definice σ -algebry

Neprázdný systém $\mathcal{A}$ podmnožin Ω se nazývá σ -algebrou právě tehdy když:

- i $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- iii $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.



Klasická definice pravděpodobnosti

Nechť má náhodný pokus konečný počet elementárních jevů – n . Každý z těchto jevů je stejně možný. Skládá-li se jev A z m elementárních jevů, pak pravděpodobnost jevu A definujeme:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

► Poznámky:

- Bez předpokladu konečnosti pravděpodobnostního prostoru a předpokladu stejné možnosti nastání elementárních jevů definice neplatí!
- Pravděpodobnostní prostor definovaný výše se nazývá: **Klasický pravděpodobnostní prostor**.
- Klasický pravděpodobnostní prostor lze získat správnou volbou elementárních jevů.
- Výpočet pravděpodobnosti je založen na matematickém modelu.



Geometrická definice pravděpodobnosti

Nechť existuje míra μ , kterou lze určit pravděpodobnost i jinak, než z pohledu relativních četností, či počtu příznivých možností. Obvykle lze pravděpodobnostní prostor Ω i jev A vyjádřit pomocí geometrických útvarů a ty pak „změřit“ – $\mu(\Omega)$ a $\mu(A)$, pak pravděpodobnost jevu A definujeme:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

► Poznámky:

- Obvykle za vhodnou míru považujeme tzv. Lebesgueův integrál.
- V našem případě si bohatě vystačíme s délkou úseček, či plochou elementárních útvarů.
- Výpočet pravděpodobnosti je opět založen na matematickém modelu.



Statistická definice pravděpodobnosti

Nechť je opakovaně prováděna série náhodných pokusů, při nichž je zaznamenáváno nastání jevu A . Označme počet pokusů n a počet nastání jevu A n_A . Kolísají-li relativní četnosti n_A/n kolem určité hodnoty – $P(A)$, lze tuto hodnotu označit za pravděpodobnost, s jakou nastává jev A .

Je-li n dostatečně velké lze relativní četnost označit přímo za pravděpodobnost, s jakou nastává jev A . Tedy

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

► Poznámky:

- Čím rozsáhlejší je zkoumání/pokus, tím věrohodnější určení pravděpodobnosti proběhlo
- Určení pravděpodobnosti je založeno na zkušenosti a opodstatněno centrální limitní větou.



Vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť Ω je pravděpodobnostní prostor a $A, B, \dots$, respektive $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou jevy na tomto prostoru, pak:

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;
- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Je-li $A \subset B$ pak $P(A) \leq P(B)$;
- $P(A) + P(A^c) = 1$;
- $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- Jsou-li A, B neslučitelné, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- Jsou-li A, B jakékoliv, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- Je-li $A \subset B$, pak $P(B - A) = P(B) - P(A)$;
- Jsou-li A, B jakékoliv, pak $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$;
- Pro $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c)$.



Podmíněná pravděpodobnost

Uvažujme dva jevy A, B takové, že $P(B) > 0$. Podmíněná pravděpodobnost nastání jevu A , jenž nastává za podmínky, že nastal jev B se definuje:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

► Poznámky:

- Jedná se vlastně o restrikci pravděpodobnosti jako míry na „pravděpodobnostní podprostor“ B
- Zřejmě platí:

$$P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = P(A).$$

- Necht $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$, potom:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$



Nezávislost jevů

Necht $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$ a necht platí: $P(A|B) = P(A)$ a zároveň $P(B|A) = P(B)$, pak jsou jevy A a B na sobě zřejmě nezávislé.

Jevy A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

► Poznámky:

- Jsou-li jevy A a B nezávislé potom i A a B^c , A^c a B i A^c a B^c jsou jevy nezávislé.
- Jsou-li jevy $A_1, A_2, \dots$ vždy po dvou nezávislé, tj. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ pro $i \neq j$, potom se tyto jevy nazývají párově nezávislé.
- Jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou vzájemně (totálně) nezávislé, pokud pro libovolnou k -tici, kde $k = 2, 3, \dots, n$, platí:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k).$$

- Jsou-li jevy $A_1, A_2, \dots$ párově nezávislé, pak to ještě neznamená, že jsou totálně nezávislé.



Násobení pravděpodobností

- Uvažujme jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$, takové, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak lze vypočítat pravděpodobnost, se kterou nastanou všechny současně jako:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}.$$



Celková pravděpodobnost

Uvažujme konečný rozklad $B_1, B_2, \dots, B_n$ pravděpodobnostního prostoru Ω takový, že $P(B_i) > 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Necht jev A je ovlivněn jevy $B_1, B_2, \dots, B_n$ a známe-li jednotlivé pravděpodobnosti $P(B_i)$ a $P(A|B_i)$, pak lze vypočítat $P(A)$ jako:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

- $P(A|B_i)$, $P(B_i)$, pro $i = 1, \dots, n$ se označují jako apriorní pravděpodobnosti



Bayesův vzorec

Nechť platí vše jako u celkové pravděpodobnosti, pak lze vypočítat $P(B_i|A)$ pro $i = 1, \dots, n$ (pravděpodobnost, že jev A nastal jako následek jevu B_i) jako:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}.$$

- ▶ $P(A|B_i)$, $P(B_i)$, pro $i = 1, \dots, n$ se označují jako apriorní pravděpodobnosti,
- ▶ $P(B_i|A)$ pro $i = 1, \dots, n$ se nazývají aposteriorní pravděpodobnosti.

