Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodná veličina – Pravděpodobnost náhodné veličiny

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012

Obsah

Náhodná veličina

Náhodnou veličinou X budeme rozumět:

- (měřitelné) zobrazení, které náhodným jevům přiřazuje reálná čísla, tj.

$$X: \quad \Omega \to \mathbb{R};$$

$$X(\omega) = x, \quad x \in \mathbb{R};$$

- respektive, proměnnou nabývající různých reálných hodnot.
- Dle počtu hodnot, jakých může náhodná veličina nabývat, ji lze rozdělit do dvou základních skupin a to náhodnou veličinu:
  - $\aleph$ diskrétní – X nabývá nejvýše spočetného počtu hodnot (konečný a nekonečný počet);
  - $\Re$ spojitou – X nabývá nespočetného počtu hodnot $(\langle \bullet ; \bullet \rangle, \mathbb{R})$.
- Zápisem $X(\omega) = x$ (nadále zkráceně $X = x$) budeme rozumět, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x. Modeluje-li náhodná veličin náhodný pokus, pak to znamená, že jev ω nastal.
- Zápisem $\mathrm{P}(X = x)$ budeme rozumět pravděpodobnost s jakou $X = x$.

Popis náhodné veličiny I

Náhodnou veličinu lze popsat (definovat):

- tabulkou hodnot náhodné veličiny X a příslušných pravděpodobností $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots (, n)$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	2/6	1/12	1/12

;

- předpisem, který stanoví, jak vypočítat $\mathrm{P}(X = x)$

$$\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, \dots;$$

- předpisem, který stanoví, jak vypočítat hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ Pozor: $f(x) \neq \mathrm{P}(X = x)$

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in \langle a; b \rangle;$$

Popis náhodné veličiny II

- distribuční funkcí $F(x)$, definovanou jako: $F(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \sum_{0 \leq i \leq x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, \ldots;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R};$$

- číselnými charakteristikami: EX, DX, ...

$$EX = \lambda, \; DX = \lambda;$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \; DX = \frac{b-a}{12}.$$

Diskrétní náhodná veličina

Nechť známe hodnoty x_i, $i = 1, 2, \ldots (, n)$ náhodné veličiny X a k nim příslušné pravděpodobnosti $P(X = x_i) = p_i$, pak:

- hodnoty p_i pro $i = 1, 2, \ldots (, n)$ označíme jako pravděpodobnostní funkci;
- $\sum_{i=1}^{n/\infty} p_i = 1$;
- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$ – distribuční funkce je skokovitá – je konstantní mezi hodnotami x_i a právě v každé hodnotě x_i má skok velikosti p_i;
- $EX = \sum_{i=1}^{n/\infty} x_i \cdot p_i$;
- $DX = \sum_{i=1}^{n/\infty} (x_i - EX)^2 \cdot p_i$.

Spojitá náhodná veličina

Nechť známe obor hodnot $x \in \mathbb{R}$ (respektive $x \in \langle \bullet; \bullet \rangle$) náhodné veličiny X a k ní příslušnou hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, pak:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = 1$;
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$ – distribuční funkce je spojitá;
- $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, \mathrm{d}x$;
- $DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x) \, \mathrm{d}x$;

! $P(X = x_0) = 0$ – Pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina nabyde konkrétní hodnoty x_0 je nulová – Paradox nulové pravděpodobnosti.

Distribuční funkce

$F(x) = P(X \leq x)$, $F: \mathbb{R} \to \langle 0; 1 \rangle$
Vlastnosti distribuční funkce:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ – omezená funkce;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. $F(a) \leq F(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ – neklesající funkce;
4. $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$, $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$ – zprava spojitá;
5. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, kde má F derivaci – její derivací je hustota pravděpodobnosti;
6. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, $\forall a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Hustota pravděpodobnosti

$f(x) = \dots,\ f:\ \mathbb{R} \to \langle 0; \infty)$

$\rightsquigarrow$ slouží pro popis spojité náhodné veličiny

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti:

1. Po částech spojitá $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. $0 \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ – nezáporná funkce;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$;
4. $\mathrm{F}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$;
5. $\mathrm{P}(a < X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall a, b, x \in \mathbb{R},\ a \leq b.$

Střední hodnota – EX I

EX – numerický popis centrální tendence náhodné veličiny

- Vzorce

$$\mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{n/\infty} x_i \cdot p_i \qquad \ddagger \qquad \mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Vlastnosti střední hodnoty

Nechť X, Y jsou libovolné náhodné veličiny, a a b reálná čísla pak:

- $\mathrm{E}b = b$ – střední hodnota konstanty je konstanta;
- $\mathrm{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathrm{E}X$, pro $a \neq 0$;
- $\mathrm{E}(X + b) = \mathrm{E}X + b$;
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$;
- $X \geq 0 \Rightarrow \mathrm{E}X \geq 0$ – střední hodnota z nezáporné náhodné veličiny je nezáporná;
- $\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X) = 0$.

- Poznámky

Střední hodnota – EX II

- Nabývá-li náhodná veličina nekonečného počtu hodnot, pak nemusí střední hodnota vždy existovat.
- Výše zmíněné vlastnosti platí pouze tehdy, mají-li obě strany výrazů smysl.
- Zvýrazněnou vlastnost lze zobecnit na konečný počet náhodných veličin.

Rozptyl – DX I

DX – numerický popis variability náhodné veličiny

- Vzorce

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 \qquad \ddagger \qquad \mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

$$\mathrm{D}X = \sum_{i=1}^{n/\infty} (x_i - \mathrm{E}X)^2 \cdot p_i \qquad \ddagger \qquad \mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Vlastnosti rozptylu

Nechť X, Y jsou libovolné náhodné veličiny, a a b reálná čísla pak:

- $\mathrm{D}b = 0$ – rozptyl konstanty je nulový;
- $\mathrm{D}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{D}X$, pro $a \neq 0$;
- $\mathrm{D}(X + b) = \mathrm{D}X$;
- Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, pak $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$;
- $\mathrm{D}X \geq 0$ – rozptyl je vždy nezáporný;
- Pro konečný rozptyl platí: $\mathrm{D}(X/\sqrt{\mathrm{D}X}) = 1$.

- Poznámky

Rozptyl – DX II

- Nabývá-li náhodná veličina nekonečného počtu hodnot, pak nemusí konečný rozptyl vždy existovat.
- Výše zmíněné vlastnosti platí pouze tehdy, mají-li obě strany výrazů smysl.
- Zvýrazněnou vlastnost lze zobecnit na konečný počet náhodných veličin.

$\sqrt{\mathrm{D}X}$ $\sqrt{\mathrm{D}X}$ – odmocnina z rozptylu se nazývá směrodatná odchylka

Medián a kvantil

$\tilde{x}$ Mediánem náhodné veličiny X je takové číslo $\tilde{x}$, pro které platí:

$$\mathrm{P}(X \leq \tilde{x}) \geq 0{,}5 \quad \wedge \quad \mathrm{P}(X \geq \tilde{x}) \geq 0{,}5.$$

$\tilde{x}_\alpha$ $\alpha \cdot 100\%$ (teoretickým) kvantilem náhodné veličiny X je takové číslo $\tilde{x}_\alpha$, $\alpha \in (0; 1)$, pro které platí:

$$\mathrm{P}(X \leq \tilde{x}_\alpha) \geq \alpha \quad \wedge \quad \mathrm{P}(X \geq \tilde{x}_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

- Poznámky
  - Medián dělí obor náhodné veličiny na dvě zhruba stejně pravděpodobné části.
  - Teoretický kvantil dělí obor náhodné veličiny na části, z nichž „nižší" hodnoty teoreticky nastávají a pravděpodobností α a „vyšší" s pravděpodobností $1 - \alpha$.
  - Teoretický kvantil není vždy určen jednoznačně (diskrétní náhodná veličina).

Kvantil spojité náhodné veličiny

- Na rozdíl od diskrétní náhodné veličiny lze kvantil $\tilde{x}_\alpha$ spojité náhodné veličiny určit většinou jednoznačně (platí pro všechna námi probíraná rozdělení spojité náhodné veličiny), tedy lze jednoznačně určit hodnotu $\tilde{x}_\alpha$ takovou, že:

$$\mathrm{F}(\tilde{x}_\alpha) = \mathrm{P}(X \leq \tilde{x}_\alpha) = \int_{-\infty}^{\tilde{x}_\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha.$$

- Poznámky
  - Kvantilovou funkci je možno chápat jako inverzní funkci k funkci distribuční (F^{-1}).
  - Kvantil $\tilde{x}_\alpha$ je možno chápat jako hodnotu inverzní funkce k funkci distribuční v bodě α ($\mathrm{F}^{-1}(\alpha)$), tedy
  - $\alpha \cdot 100\%$ kvantil je hodnota inverzní distribuční funkce v bodě α:

$$\tilde{x}_\alpha = \mathrm{F}^{-1}(\alpha).$$

  - Kvantily některých základních rozdělení mají zavedené speciální značení (u_α, $t_\alpha(n)$, ...).

Grafická vizualizace rozdělení náhodných veličin

- Polygon četností – vizualizace diskrétního rozdělení
  - na vodorovnou osu se vynáší hodnoty náhodné veličiny x_i
  - na svislou osu pravděpodobnost
  - nad jednotlivými hodnotami náhodné veličiny x_i jsou vynášeny hodnoty příslušné pravděpodobnosti p_i
  - jednotlivé vynesené pravděpodobnosti jsou navíc spojeny lomenou čárou
- Histogram četností – vizualizace diskrétního či spojitého rozdělení
  - podobné jako u polygonu četností
  - možnost shlukovat hodnoty do intervalů např. z důvodu srovnání se skutečností (viz třídění statistického znaku)
- Graf distribuční funkce
- Graf hustoty pravděpodobnosti