

Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodná veličina – Vybraná diskrétní rozdělení

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012



Obsah

Vybraná diskrétní rozdělení

- Alternativní rozdělení

- Binomické rozdělení

- Geometrické rozdělení

- Negativní binomické rozdělení

- Poissonovo rozdělení

- Hypergeometrické rozdělení



● rozdělení

Symb: Symbolické vyjádření toho, že náhodná veličina X sleduje určité rozdělení.

Hodnoty: Hodnoty, kterých daná náhodná veličina může nabývat.

Def: Definice náhodné veličiny, tj. přiřazení pravděpodobností jednotlivým hodnotám náhodné veličiny (pravděpodobnostní funkce) respektive předpis pro hustotu pravděpodobnosti a její **vlastnosti**.

F: Předpis pro distribuční funkci dané náhodné veličiny (**vlastnosti**).

F^{-1} : Značení kvantilu (kvantilové funkce) dané náhodné veličiny, vzhledem k jednoznačnosti pouze pro spojité náhodné veličiny (**vlastnosti**).

E: Střední hodnota pro danou náhodnou veličinu **EX** .

D: Rozptyl pro danou náhodnou veličinu **DX** .

Model: Náhodný jev, situace, kterou lze pomocí tohoto rozdělení modelovat. Kde se rozdělení nejčastěji využívá.



Alternativní rozdělení (Bernoulliho) – $A(\pi)$

Symb: $X \sim A(\pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1$

Def: Pro $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti alternativního rozdělení následující:

x_i	0	1
p_i	$1 - \pi$	π

F:

$$F(x; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - \pi & 0 \leq x < 1; \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

E: $EX = \pi$

D: $DX = \pi(1 - \pi)$

Model: Alternativní rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž úspěch nastává s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$ ($X(\text{úspěch}) = 1$ a $X(\text{neúspěch}) = 0$). Náhodná veličina sledující alternativní rozdělení je speciálním případem binomického rozdělení s parametrem $n = 1$.

► Pojmenováno podle JACOBA (JACQUES) BERNOULLIho (1654–1705). 

Binomické rozdělení – $\text{Bi}(n; \pi)$ I

Symb: $X \sim \text{Bi}(n; \pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots, n$

Def: Pro $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti binomického rozdělení následující:

$$P(X = x; n; \pi) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}.$$

F:

$$F(x; n; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \binom{n}{i} \pi^i (1 - \pi)^{n-i} & 0 \leq x < n; \\ 1 & x \geq n. \end{cases}$$

E: $EX = n\pi$

D: $DX = n\pi(1 - \pi)$



Binomické rozdělení – $\text{Bi}(n; \pi)$ II

Model: Binomické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet úspěchů – x nastávajících v n **nezávisle** opakovaných pokusech s alternativním rozdělením. V každém z opakování nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1 - \pi)$ ($x = 0, 1, \dots, n$ je modelem pro to, že nenastal žádný úspěch, nastal jeden úspěch, $\dots$, nastalo n úspěchů z n pokusů). Pro parametr $\pi = 1/2$ je rozdělení symetrické. Pro $X \sim \text{Bi}(1; \pi)$ se jedná o alternativní rozdělení. Je-li $X_i \sim A(\pi)$, pro $i = 1, \dots, n$ a zároveň X_i a X_j , pro $i \neq j$ jsou nezávislé, pak $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n; \pi)$.



Geometrické rozdělení – $G(\pi)$ I

Symb: $X \sim G(\pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$

Def: Pro $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti geometrického rozdělení následující:

$$P(X = x; \pi) = \pi(1 - \pi)^x.$$

F:

$$F(x; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \pi(1 - \pi)^i & 0 \leq x. \end{cases}$$

E: $EX = \frac{1 - \pi}{\pi}$

D: $DX = \frac{1 - \pi}{\pi^2}$



Geometrické rozdělení – $G(\pi)$ II

Model: Geometrické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet neúspěchů – x , které předcházejí prvnímu úspěšnému pokusu – tzv. čekání na první úspěch. Zároveň platí, že se jedná o **nezávislé** alternativní pokusy. V každém z opakování pokusu nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1 - \pi)$ ($x = 0, 1, \dots$ je modelem pro to, že před prvním úspěchem nenastal žádný neúspěch, nastal jeden neúspěch, $\dots$). Náhodná veličina sledující geometrické rozdělení je speciálním případem negativního binomického rozdělení s parametrem $n = 1$.



Diskrétní negativní binomické rozdělení (Pascalovo) – $n\text{Bi}(n; \pi)$ I

Symb: $X \sim n\text{Bi}(n; \pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$

Def: Pro $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti negativního binomického rozdělení následující:

$$P(X = x; n; \pi) = \binom{n+x-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^x.$$

F:

$$F(x; n; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \binom{n+i-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^i & 0 \leq x. \end{cases}$$

E: $EX = \frac{n(1-\pi)}{\pi}$

D: $DX = \frac{n(1-\pi)}{\pi^2}$



Diskrétní negativní binomické rozdělení (Pascalovo) – $n\text{Bi}(n; \pi)$ II

- Model:** Negativní binomické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet neúspěchů – x , které předcházejí n -tému úspěšnému pokusu. Zároveň platí, že se jedná o **nezávislé** alternativní pokusy. V každém z opakování pokusu nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1 - \pi)$ ($x = 0, 1, \dots$ je modelem pro to, že před n -tým úspěchem nenastal žádný neúspěch, nastal jeden neúspěch, $\dots$). Pro $X \sim n\text{Bi}(1; \pi)$ se jedná o geometrické rozdělení.
- Pojmenováno podle BLAISE PASCALA (1623–1862).



Poissonovo rozdělení – $Po(\lambda)$

Symb: $X \sim Po(\lambda)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$

Def: Pro $\lambda > 0$ je rozdělení pravděpodobnosti Poissonova rozdělení následující:

$$P(X = x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

F:

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} & x \geq 0. \end{cases}$$

E: $EX = \lambda$

D: $DX = \lambda$

Model: Poissonovo rozdělení modeluje řídké jevy (počet nastavších situací za časovou jednotku, počet kazů na látce, ...), jež nejčastěji nastávají v $\pm \lambda$ případech, jiný počet výskytů je velmi málo pravděpodobný.

► Pojmenováno podle SIMEÓNA DENISE POISSONA (1781–1840).



Hypergeometrické rozdělení – $H(M; N; n)$ I

Symb: $X \sim H(M; N; n)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in \langle \max(0; n - (N - M)); \min(M; n) \rangle$

Def: Pro $N, M, n \in \mathbb{N}_0$ splňující nerovnice – $0 \leq M \leq N$ a $1 \leq n \leq N$ je rozdělení pravděpodobnosti hypergeometrického rozdělení následující:

$$P(X = x; M; N; n) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

F:

$$F(x; M; N; n) = \begin{cases} 0 & x < \max(0; n - (N - M)); \\ \sum_{\max \leq i \leq \min} \frac{\binom{M}{i} \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} & x \text{ je mezi}; \\ 1 & x \geq \min(M; n). \end{cases}$$

E: $EX = n \cdot \frac{M}{N}$



Hypergeometrické rozdělení – $H(M; N; n)$ II

$$D: DX = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{nM}{N} \cdot \frac{N-M}{N}$$

Model: Hypergeometrické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet úspěchů – x v n **závislých** pokusech. Méně obecně řečeno se jedná o situaci, kdy je ze dvou druhů předmětů, jež jsou k dispozici – M předmětů jednoho druhu a $N - M$ druhého druhu (tj. dohromady N) – vytažena n -tice bez vracení, v níž je x předmětů prvního druhu. (např. $X = 0$ znamená, v n -tici nebyl ani jeden předmět prvního druhu). Ne všechny situace mohou nastat, proto bylo nutné stanovit podmínky pro hodnoty, jichž může náhodná veličina nabývat.

