

Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodná veličina – Vybraná diskrétní rozdělení

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012



• rozdělení

Symb: Symbolické vyjádření toho, že náhodná veličina X sleduje určité rozdělení.

Hodnoty: Hodnoty, kterých daná náhodná veličina může nabývat.

Def: Definice náhodné veličiny, tj. přiřazení pravděpodobností jednotlivým hodnotám náhodné veličiny (pravděpodobnostní funkce) respektive předpis pro hustotu pravděpodobnosti a její **vlastnosti**.

F: Předpis pro distribuční funkci dané náhodné veličiny (**vlastnosti**).

F⁻¹: Značení kvantilu (kvantilové funkce) dané náhodné veličiny, vzhledem k jednoznačnosti pouze pro spojité náhodné veličiny (**vlastnosti**).

E: Střední hodnota pro danou náhodnou veličinu **EX**.

D: Rozptyl pro danou náhodnou veličinu **DX**.

Model: Náhodný jev, situace, kterou lze pomocí tohoto rozdělení modelovat. Kde se rozdělení nejčastěji využívá.



Obsah

Vybraná diskrétní rozdělení

Alternativní rozdělení

Binomické rozdělení

Geometrické rozdělení

Negativní binomické rozdělení

Poissonovo rozdělení

Hypergeometrické rozdělení



Alternativní rozdělení (Bernoulliho) – $A(\pi)$

Symb: $X \sim A(\pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1$

Def: Pro $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti alternativního rozdělení

následující:

x_i	0	1
p_i	$1 - \pi$	π

F:

$$F(x; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - \pi & 0 \leq x < 1; \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

E: $EX = \pi$

D: $DX = \pi(1 - \pi)$

Model: Alternativní rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž úspěch nastává s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$ ($X(\text{úspěch}) = 1$ a $X(\text{neúspěch}) = 0$). Náhodná veličina sledující alternativní rozdělení je speciálním případem binomického rozdělení s parametrem $n = 1$.

► Pojmenováno podle JACOBA (JACQUES) BERNOULLIHO (1654–1705).



Binomické rozdělení – $\text{Bi}(n; \pi)$ ISymb: $X \sim \text{Bi}(n; \pi)$ Hodnoty: $x = 0, 1, \dots, n$ Def: Pro $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti binomického rozdělení následující:

$$P(X = x; n; \pi) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}.$$

F:

$$F(x; n; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \binom{n}{i} \pi^i (1 - \pi)^{n-i} & 0 \leq x < n; \\ 1 & x \geq n. \end{cases}$$

E: $EX = n\pi$ D: $DX = n\pi(1 - \pi)$ Geometrické rozdělení – $G(\pi)$ ISymb: $X \sim G(\pi)$ Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$ Def: Pro $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti geometrického rozdělení následující:

$$P(X = x; \pi) = \pi(1 - \pi)^x.$$

F:

$$F(x; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \pi(1 - \pi)^i & 0 \leq x. \end{cases}$$

$$E: EX = \frac{1 - \pi}{\pi}$$

$$D: DX = \frac{1 - \pi}{\pi^2}$$

Binomické rozdělení – $\text{Bi}(n; \pi)$ II

Model: Binomické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet úspěchů – x nastávajících v n **nezávislé** opakovaných pokusech s alternativním rozdělením. V každém z opakování nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1 - \pi)$ ($x = 0, 1, \dots, n$ je modelem pro to, že nenastal žádný úspěch, nastal jeden úspěch, $\dots$, nastalo n úspěchů z n pokusů). Pro parametr $\pi = 1/2$ je rozdělení symetrické. Pro $X \sim \text{Bi}(1; \pi)$ se jedná o alternativní rozdělení. Je-li $X_i \sim A(\pi)$, pro $i = 1, \dots, n$ a zároveň X_i a X_j , pro $i \neq j$ jsou nezávislé, pak $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n; \pi)$.

Geometrické rozdělení – $G(\pi)$ II

Model: Geometrické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet neúspěchů – x , které předcházejí prvnímu úspěšnému pokusu – tzv. čekání na první úspěch. Zároveň platí, že se jedná o **nezávislé** alternativní pokusy. V každém z opakování pokusu nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1 - \pi)$ ($x = 0, 1, \dots$ je modelem pro to, že před prvním úspěchem nenastal žádný neúspěch, nastal jeden neúspěch, $\dots$). Náhodná veličina sledující geometrické rozdělení je speciálním případem negativního binomického rozdělení s parametrem $n = 1$.



Diskrétní negativní binomické rozdělení (Pascalovo) – $n\text{Bi}(n; \pi)$ I

Symb: $X \sim n\text{Bi}(n; \pi)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$

Def: Pro $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0; 1)$ je rozdělení pravděpodobnosti negativního binomického rozdělení následující:

$$P(X = x; n; \pi) = \binom{n+x-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^x.$$

F:

$$F(x; n; \pi) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} \binom{n+i-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^i & 0 \leq x. \end{cases}$$

E: $EX = \frac{n(1-\pi)}{\pi}$

D: $DX = \frac{n(1-\pi)}{\pi^2}$



Poissonovo rozdělení – $\text{Po}(\lambda)$

Symb: $X \sim \text{Po}(\lambda)$

Hodnoty: $x = 0, 1, \dots$

Def: Pro $\lambda > 0$ je rozdělení pravděpodobnosti Poissonova rozdělení následující:

$$P(X = x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

F:

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \sum_{0 \leq i \leq x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} & x \geq 0. \end{cases}$$

E: $EX = \lambda$

D: $DX = \lambda$

Model: Poissonovo rozdělení modeluje řídké jevy (počet nastavších situací za časovou jednotku, počet kazů na látce, ...), jež nejčastěji nastávají v $\pm \lambda$ případech, jiný počet výskytů je velmi málo pravděpodobný.

► Pojmenováno podle SIMEÓNA DENISE POISSONA (1781–1840).



Diskrétní negativní binomické rozdělení (Pascalovo) – $n\text{Bi}(n; \pi)$ II

Model: Negativní binomické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet neúspěchů – x , které předcházejí n -tému úspěšnému pokusu. Zároveň platí, že se jedná o **nezávislé** alternativní pokusy. V každém z opakování pokusu nastává úspěch s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $(1-\pi)$ ($x = 0, 1, \dots$ je modelem pro to, že před n -tým úspěchem nenastal žádný neúspěch, nastal jeden neúspěch, ...). Pro $X \sim n\text{Bi}(1; \pi)$ se jedná o geometrické rozdělení.

► Pojmenováno podle BLAISE PASCALA (1623–1862).



Hypergeometrické rozdělení – $H(M; N; n)$ I

Symb: $X \sim H(M; N; n)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in \langle \max(0; n - (N - M)); \min(M; n) \rangle$

Def: Pro $N, M, n \in \mathbb{N}_0$ splňující nerovnice $0 \leq M \leq N$ a $1 \leq n \leq N$ je rozdělení pravděpodobnosti hypergeometrického rozdělení následující:

$$P(X = x; M; N; n) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

F:

$$F(x; M; N; n) = \begin{cases} 0 & x < \max(0; n - (N - M)); \\ \sum_{\max(0; n - (N - M)) \leq i \leq x} \frac{\binom{M}{i} \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} & x \text{ je mezi}; \\ 1 & x \geq \min(M; n). \end{cases}$$

E: $EX = n \cdot \frac{M}{N}$



Hypergeometrické rozdělení – $H(M; N; n)$ II

$$D: DX = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{nM}{N} \cdot \frac{N-M}{N}$$

Model: Hypergeometrické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet úspěchů – x v n **závislých** pokusech. Méně obecně řečeno se jedná o situaci, kdy je ze dvou druhů předmětů, jež jsou k dispozici – M předmětů jednoho druhu a $N - M$ druhého druhu (tj. dohromady N) – vytažena n -tice bez vracení, v níž je x předmětů prvního druhu. (např. $X = 0$ znamená, v n -tici nebyl ani jeden předmět prvního druhu). Ne všechny situace mohou nastat, proto bylo nutné stanovit podmínky pro hodnoty, jichž může náhodná veličina nabývat.

