Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodná veličina – Vybraná spojitá rozdělení

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

12. února 2012

Obsah

• rozdělení

Symb: Symbolické vyjádření toho, že náhodná veličina X sleduje určité rozdělení.

Hodnoty: Hodnoty, kterých daná náhodná veličina může nabývat.

Def: Definice náhodné veličiny, tj. přiřazení pravděpodobností jednotlivým hodnotám náhodné veličiny (pravděpodobnostní funkce) respektive předpis pro hustotu pravděpodobnosti a její vlastnosti.

F: Předpis pro distribuční funkci dané náhodné veličiny (vlastnosti).

F^{-1}: Značení kvantilu (kvantilové funkce) dané náhodné veličiny, vzhledem k jednoznačnosti pouze pro spojité náhodné veličiny (vlastnosti).

E: Střední hodnota pro danou náhodnou veličinu EX.

D: Rozptyl pro danou náhodnou veličinu DX.

Model: Náhodný jev, situace, kterou lze pomocí tohoto rozdělení modelovat. Kde se rozdělení nejčastěji využívá.

(Spojité) rovnoměrné rozdělení – R(a; b) I

Symb: $X \sim \mathrm{R}(a; b)$

Hodnoty: $x \in (a; b)$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, pro $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x; a; b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a; b) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (a; b) \end{cases}$$

F:

$$\mathrm{F}(x; a; b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in \langle a; b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

F^{-1}: Nemá speciální značení.

E: $EX = (a + b)/2$

D: $DX = (b - a)^2/12$

Model: Rovnoměrné rozdělení na intervalu $(a; b)$, kde $-\infty < a < b < \infty$, má ve všech bodech daného intervalu konstantní hustotu pravděpodobnosti $1/(b - a)$, mimo tento daný interval je hustota pravděpodobnosti nulová. Náhodnou veličinou s rovnoměrným rozdělením je např. chyba při zaokrouhlování.

Normální normované rozdělení – N(0; 1), Z I

Symb: $X \sim \mathrm{N}(0;1)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{R}$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F^{-1}: $u_\alpha, \quad \alpha \in (0;1).$

$$u_\alpha = -u_{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0;1)$$

E: $\mathrm{E}X = 0$

Normální normované rozdělení – N(0; 1), Z II

D: $\mathrm{D}X = 1$

Model: Nejdůležitější rozdělení matematické statistiky, které se používá v mnoha statistických metodách.
Dříve tabulky hodnot $\Phi(x)$ a u_α.

Tabelované hodnoty pro N(0; 1) vyjadřující $\mathrm{F}(X) = \mathrm{P}(X \le x) = \Phi(x)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,568	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,651
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,687
0,5	0,696	0,695	0,699	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,725	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,754
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,817	0,821	0,824	0,826	0,829	0,832	0,834	0,837	0,838
1,0	0,841	0,844	0,846	0,849	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,912	0,913	0,915	0,916	0,917
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,927	0,928	0,929	0,931	0,931
1,5	0,933	0,935	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,963	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,970
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,976
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
⋮										

- $\Phi(1{,}82) = 0{,}966$;
- $\Phi(-0{,}35) = 1 - \Phi(0{,}35) = 1 - 0{,}637 = 0{,}363$;
- $u_{0{,}987} = 2{,}22$;
- $u_{0{,}434} = -u_{1-0{,}434} = -u_{0{,}566} = -0{,}165$.

Normální rozdělení (Gaussovo-Laplaceovo) – $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$ I

Symb: $X \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{R}$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti pro $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu + x) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F:

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(\mu + x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(\mu - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F^{-1}: Nemá speciální značení.

E: $\mathrm{E}X = \mu$

D: $\mathrm{D}X = \sigma^2$

Normální rozdělení (Gaussovo-Laplaceovo) – $\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ II

Model: Nejdůležitější rozdělení matematické statistiky, které se nepřímo používá v mnoha statistických metodách, obvykle je transformací $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ převáděno na normální normované rozdělení, které je tabelováno. Potom:

- $\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad x \in \mathbb{R}$,
- $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad x \in \mathbb{R}$ a
- $\Phi^{-1}_{\mu,\sigma^2}(\alpha) = \mu + u_\alpha \cdot \sigma \quad \alpha \in (0;1)$.
- Pojmenováno podle Carla Friedricha Gausse (1777–1855) a Marquisa Pierre-Simona Laplaceho (1749–1827).

Pravidlo tří sigma pro normální rozdělení

1. Uvažme náhodnou veličinu X sledující normální rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.
   Pro libovolné $a < b$ platí: $$\begin{aligned} \mathrm{P}(a < X < b) &= \mathrm{P}(X < b) - \mathrm{P}(X \le a) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X \ge b) - \mathrm{P}(X \le a) \end{aligned}.$$
2. Zvolme a a b tak, aby $\mathrm{P}(X \ge b) = \mathrm{P}(X \le a) = \alpha/2$, pro $\alpha < 0{,}5$. Pak:
   - $\mathrm{P}(a < X < b) = 1 - \alpha$,
   - $a = \Phi^{-1}_{\mu,\sigma^2}(\alpha/2) = \mu + u_{\alpha/2} \cdot \sigma = \mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma$ a
   - $b = \Phi^{-1}_{\mu,\sigma^2}(1-\alpha/2) = \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma$.
3. $\mathrm{P}(\mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma < X < \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sigma) = 1 - \alpha$
   - Pro $1 - \alpha = 0{,}682 \quad \mathrm{P}(\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma) = 1 - \alpha$
   - pro $1 - \alpha = 0{,}954 \quad \mathrm{P}(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma) = 1 - \alpha$ a
   - pro $1 - \alpha = 0{,}997 \quad \mathrm{P}(\mu - 3 \cdot \sigma < X < \mu + 3 \cdot \sigma) = 1 - \alpha$.
4. Interpretace: 99,7 % hodnot náhodné veličiny sledující normální rozděleni leží v intervalu $\mu \pm 3\sigma$

χ^2 rozdělení (Pearsonovo rozdělení) – $\chi^2(n)$ I

Symb: $X \sim \chi^2(n)$

Hodnoty: $x \in (0;\infty)$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, obvykle pro $n = 1, 2, \dots$:

$$f(x;n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

F:

$$\mathrm{F}(x;n) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^x t^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t & x > 0. \end{cases}$$

F^{-1}: $\chi^2_\alpha(n), \quad \alpha \in (0;1)$.

E: $\mathrm{E}X = n$

D: $\mathrm{D}X = 2n$

Model: Jedno z významných rozdělení matematické statistiky, které se používá v mnoha statistických metodách, obvykle ve spojitosti s rozptyly náhodných veličin.

χ^2 rozdělení (Pearsonovo rozdělení) – $\chi^2(n)$ II

- Jsou-li U_i, $i = 1, 2, \dots(, n)$ náhodné veličiny takové, že $U_i \sim \mathrm{N}(0;1)$ pro $i = 1, 2, \dots(, n)$, pak:

  $$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$$

  má χ^2 rozdělení s n stupni volnosti.
- Dříve tabulky hodnot zejména pro χ^2_α.
- Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$, $a > 0$.
- Pojmenováno podle Karla Pearsona (1857–1936).

Studentovo rozdělení (t rozdělení) – $t(n)$ I

Symb: $X \sim t(n)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{R}$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, obvykle $n = 1, 2, \ldots$ může být i $n \in (0; \infty)$:

$$f(x; n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}.$$

$$f(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F:

$$F(x; n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{x} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$F(x) = 1 - F(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

F^{-1}: $t_\alpha(n) \quad \alpha \in (0; 1)$

$$t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n), \quad \alpha \in (0; 1).$$

E: $EX = 0, \qquad$ pro $n > 1$

D: $DX = \frac{n}{n-2}, \qquad$ pro $n > 2$

Studentovo rozdělení (t rozdělení) – $t(n)$ II

Model: Jedno z významných rozdělení matematické statistiky, které se používá v mnoha statistických metodách, obvykle nahrazuje normální normované rozdělení v případech, kdy není znám rozptyl.

- Jsou-li U a χ^2 takové nezávislé náhodné veličiny, že $U \sim \mathrm{N}(0; 1)$ a $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ a definujeme-li:

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}},$$

  pak t má studentovo rozdělení o n stupních volnosti.
- Dříve tabulky hodnot zejména $t_\alpha(n)$. Pro dostatečně velká n lze studentovo rozdělení nahradit normálním normovaným ($n > 40$: $t(n) \approx \mathrm{N}(0; 1)$).
- Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$, $a > 0$.
- Pro $n = 1$ se studentovo rozdělení nazývá Cauchyho rozdělení.
- Pojmenováno podle Williama Sealyho Gosseta (1876–1937), který publikoval pod pseudonymem „Student".

Fischerovo-Snedecorovo rozdělení (F rozdělení) – $F(m; n)$ I

Symb: $X \sim F(m; n)$

Hodnoty: $x \in (0; \infty)$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, obvykle pro $m, n > 0$ $m, n = 1, 2, \ldots$:

$$f(x; m; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \cdot \left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{-\frac{m+n}{2}}.$$

F:

$$F(x; m; n) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \int_0^x t^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \cdot \left(1 + \frac{m}{n} t\right)^{-\frac{m+n}{2}} \,\mathrm{d}t & x > 0. \end{cases}$$

F^{-1}: $F_\alpha(m; n) \quad \alpha \in (0; 1)$

$$F_\alpha^{-1}(m; n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}^{-1}(n; m)}, \quad \alpha \in (0; 1).$$

Fischerovo-Snedecorovo rozdělení (F rozdělení) – $F(m; n)$ II

E: $EX = \frac{n}{n-2}, \qquad$ pro $n > 2$

D: $DX = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \qquad$ pro $n > 4$

Model: Jedno z významných rozdělení matematické statistiky, které se používá v mnoha statistických metodách, obvykle ve spojitosti s poměry (podíly) rozptylů náhodných veličin.

- Jsou-li χ_1^2 a χ_2^2 takové nezávislé náhodné veličiny, že $\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$ a definujeme-li:

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{m}}{\frac{\chi_2^2}{n}},$$

  pak F má Fischerovo-Snedecorovo rozdělení o m a n stupních volnosti.
- Dříve tabulky hodnot zejména $F_\alpha(m; n)$.
- Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Fischerovo-Snedecorovo rozdělení (F rozdělení) – $F(m; n)$ III

- Pojmenováno podle sira RONALDA AYLMERA FISHERA (1890–1962) a WADDELA GEORGEHO SNEDECORA (1881–1974).

Weibullovo rozdělení – W(a; b) I

Symb: $X \sim \mathrm{W}(c; \delta)$

Hodnoty: $x > 0$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, pro $c, \delta > 0$

$$f(x; c; \delta) = \begin{cases} \frac{cx^{c-1}}{\delta^c} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

F:

$$\mathrm{F}(x; c; \delta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & x \ge 0) \end{cases}$$

E: $\mathrm{E}X = \delta \Gamma(\frac{1}{c} + 1)$

D: $\mathrm{D}X = \delta^2 \left[\Gamma(\frac{2}{c} + 1) - \Gamma^2(\frac{1}{c} + 1)\right]$

Model: Nejčastěji se používá pro modelování životnosti zařízení. Pro

- $c > 1$ modeluje životnost zařízení, u něhož se pravděpodobnost poruchy s časem zvětšuje,
- $c = 1$ modeluje životnost zařízení, u něhož se pravděpodobnost poruchy s časem nemění,

Weibullovo rozdělení – W(a; b) II

- (0)$c < 1$ modeluje životnost zařízení, u něhož se pravděpodobnost poruchy s časem zmenšuje.
- Pro $X \sim \mathrm{W}(1; \delta)$ se jedná o spojité exponenciální rozdělení.

Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

- Pro $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ nezávislé náhodné veličiny, pak $\min(X_i)$ má za určitých podmínek pro velká n Weibullovo rozdělení.
- Pojmenováno podle WALODDIho WEIBULLa (1887–1979).

Logaritmicko normální (Lognormální) rozdělení – $\mathrm{LN}\left(\mu; \sigma^2\right)$ I

Symb: $X \sim \mathrm{LN}\left(\mu; \sigma^2\right)$

Hodnoty: $x \in \mathbb{R}$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti pro $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$:

$$f(x; \mu; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

F:

$$\mathrm{F}(x; \mu; \sigma^2) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^x \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t & x \ge 0) \end{cases}$$

F^{-1}: Nemá speciální značení.

E: $\mathrm{E}X = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

D: $\mathrm{D}X = \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2} \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$

Logaritmicko normální (Lognormální) rozdělení – $\mathrm{LN}(\mu;\sigma^2)$ II

Model: $X \sim \mathrm{LN}(\mu;\sigma^2) \Leftrightarrow \ln X \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$, jinak řečeno pokud $Y = \ln X$, kde $X \sim \mathrm{LN}(\mu;\sigma^2)$ pak $Y \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$.

- Typické použití: je-li náhodná veličina výsledkem velkého počtu nezávislých náhodných vlivů, které se navzájem násobí, pak X simLN$(\mu;\sigma^2)$.
- Pozor! Parametry μ a σ^2 se uvádějí pro $\ln X$ nikoli pro X.
- Hustotou a distribuční funkci lze vyjádřit prostřednictvím normálního normovaného rozdělení – $f(x;\mu;\sigma^2) = \frac{1}{x\sigma}\varphi(\frac{\ln x-\mu}{\sigma})$, pro $x > 0$ a $\mathrm{F}(x;\mu;\sigma^2) = \Phi(\frac{\ln x-\mu}{\sigma})$, pro $x > 0$.

Gama rozdělení – Gama$(\alpha;\beta)$ I

Symb: $X \sim \mathrm{Gama}(\alpha;\beta)$

Hodnoty: $x \in (0;\infty)$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, pro $\alpha,\beta > 0$:

$$f(x;\alpha;\beta) = \begin{cases} \frac{(x)^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

F:

$$\mathrm{F}(x;\alpha;\beta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\Gamma_{x/\beta}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} & x \ge 0 \end{cases}$$

kde $\Gamma_{x/\beta}$ je nekompletní gama funkce

F^{-1}: Nemá speciální značení.

E: $\mathrm{E}X = \alpha\beta$

D: $\mathrm{D}X = \alpha\beta^2$

Model:
- Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je gama rozdělení nazýváno Eralangovo.
- Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Beta (čtyřparametrické, obecné) rozdělení – Beta$(a;b;\alpha;\beta)$ I

Symb: $X \sim \mathrm{Beta}(a;b;\alpha;\beta)$

Hodnoty: $x \in (a;b)$

Def: definováno hustotou pravděpodobnosti, pro $a,b \in \mathbb{R}, a < b; \alpha,\beta > 0$:

$$f(x;a;b;\alpha;\beta) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)(b-a)^{\alpha+\beta-1}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

F:

$$\mathrm{F}(x;a;b;\alpha;\beta) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{\mathrm{B}_z(\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} & x \in \langle a;b) \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

kde $z = \frac{x-a}{b-a}$ a B_z je nekompletní beta funkce

F^{-1}: Nemá speciální značení.

E: $\mathrm{E}X = a + \frac{b\alpha}{\alpha+\beta}$

Beta (čtyřparametrické, obecné) rozdělení – Beta$(a;b;\alpha;\beta)$ II

D: $\mathrm{D}X = \frac{\alpha\beta(b-a)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Model:
- Hodnoty a a b lze chápat jako minimum a maximum.
- Pro $a = 0$ a $b = 1$ se jedná o tzv. „klasické" dvouparametrické beta rozdělení s hustotou ve tvaru: $f(x;\alpha;\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}$, pro $x \in (0;1)$, $\alpha,\beta > 0$.
- Je-li $\alpha = \beta = 1$ jedná se o rovnoměrné rozdělení $\mathrm{R}(a;b)$.
- B Beta funkce $\mathrm{B}(a;b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $a,b > 0$.
- Γ Gamma funkce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Vztahy mezi rozděleními – přípustné aproximace I

- Některá rozdělení jsou si velice blízká (dávají podobné výsledky, liší se v dílčích předpokladech)
- Za určitých předpokladů lze jedno rozdělení aproximovat druhým, např. kvůli:
  - jednoduššímu numerickému výpočtu,
  - zadání příkladu,
  - přímému řešení.
- Podobnosti:
  - Binomické a Poissonovo rozdělení – $\mathrm{Bi}(n;\pi) \approx \mathrm{Po}(n \cdot \pi)$, pro $n \geq 30$, $\pi \leq 0{,}1$
  - Hypergeometrické a binomické rozdělení – $\mathrm{H}(M;N;n) \approx \mathrm{Bi}(n;M/N)$, pro $n/N \leq 0{,}1$
  - Hypergeometrické a Poissonovo rozdělení – $\mathrm{H}(M;N;n) \approx \mathrm{Po}(n \cdot M/N)$, pro $n/N \leq 0{,}1$, $M/N \leq 0{,}1$ a $n \geq 30$
  - Studentovo a normální normované rozdělení – $t(n) \approx \mathrm{N}(0;1)$, pro $n > 40(100)$
  - Alternativní a normální rozdělení – $\mathrm{A}(\pi) \approx \mathrm{N}(\pi;\pi \cdot (1-\pi))$, pro velká n
  - Binomické a normální rozdělení – $\mathrm{Bi}(n;\pi) \approx \mathrm{N}(n \cdot \pi; n \cdot \pi \cdot (1-\pi))$, pro velká n

Vztahy mezi rozděleními – přípustné aproximace II

- Poznámka: Výše uvedené aproximace plynnou z tzv. Centrální limitní věty a Zákona velkých čísel. Hranice použitelnosti aproximace jsou stanoveny tak, aby se výsledky „příliš“ nelišily.