

Statistika

Teorie odhadu – statistická indukce
– Intervalový odhad μ , σ^2 a π

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

21. února 2012



Obsah

Definice

Interpretace

Matematická statistika a rozdělení parametrů rozdělení

Výsledky matematické statistiky



Intervalový odhad I

► Oboustranný intervalový odhad

$$P(T_D < \theta < T_H) = 1 - \alpha \quad P(\theta \in (T_D; T_H)) = 1 - \alpha$$

- $1 - \alpha$ označujeme jako **koeficient spolehlivosti (konfidence)**, **spolehlivost**
- α označujeme jako **riziko odhadu** (hladina významnosti)
- $1 - \alpha = 0,9; 0,95; 0,99$ a $0,999$
- $T_H - T_D$ se nazývá **přesnost odhadu**
- U symetricky konstruovaných intervalů spolehlivosti (μ, π) se $\frac{T_H - T_D}{2}$ značí Δ a nazývá se **maximální přípustná chyba odhadu**
- Bodový odhad lze považovat za extrémní případ intervalového odhadu s nulovou šířkou. Je sice přesný, ale ztrácí spolehlivost $1 - \alpha \rightarrow 0$.
- Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P(T_D < \theta) = 1 - \alpha \quad P(\theta \in (T_D; \infty)) = 1 - \alpha$$

- $1 - \alpha$ označujeme jako **koeficient spolehlivosti (konfidence)**, **spolehlivost**
- α označujeme jako **riziko podhodnocení** (hladina významnosti)
- $1 - \alpha = 0,9; 0,95; 0,99$ a $0,999$



Intervalový odhad II

- ▶ Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P(\theta < T_H) = 1 - \alpha \quad P(\theta \in (\infty; T_H)) = 1 - \alpha$$

- ▶ $1 - \alpha$ označujeme jako **koeficient spolehlivosti (konfidence)**, **spolehlivost**
- ▶ α označujeme jako **riziko nadhodnocení** (hladina významnosti)
- ▶ $1 - \alpha = 0,9; 0,95; 0,99$ a $0,999$



Interpretace intervalového odhadu

► Správná interpretace

- $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalů obsahuje parametr θ .
- Každý interval „překryje“ odhadovaný parametr s $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ pravděpodobností.
- Interval spolehlivosti je „plácačka“, která s danou spolehlivostí $(1 - \alpha)$ připlácne mouchu (přilepenou) – parametr.

► Nesprávná interpretace

- Interval spolehlivosti obsahu $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ všech možných hodnot odhadovaného parametru θ .
- Parametr θ padne do $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalu spolehlivosti právě s pravděpodobností $1 - \alpha$.
- Parametr θ je šíp, který se spolehlivostí $(1 - \alpha)$ zasáhne terč – interval spolehlivosti.

~> Náhodný je interval spolehlivosti nikoliv parametr, proto se výroky o pravděpodobnosti MUSÍ týkat intervalu a nikoliv parametru rozdělení, který je daný, neměnný, neznámý a proto jej odhadujeme.



Matematická statistika a rozdělení parametrů rozdělení I

Podstatná tvrzení pro určení intervalových odhadů parametru normálního rozdělení

O rozdělení náhodného výběru z $N(\mu; \sigma^2)$

Má-li populace normální rozdělení s parametry μ a σ^2 pak náhodný výběr má též normální rozdělení s parametry μ a σ^2

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu; \sigma^2)$$

O rozdělení náhodné veličiny sledující $N(\mu; \sigma^2)$ – opakování

Má-li náhodná veličina normální rozdělení s parametry μ a σ^2 , pak náhodná veličina $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ má normální normované rozdělení $N(0; 1)$.

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$$



Matematická statistika a rozdělení parametrů rozdělení II

Podstatná tvrzení pro určení intervalových odhadů parametru normálního rozdělení

O rozdělení střední hodnoty náhodného výběru z $N(\mu; \sigma^2)$

Má-li populace normální rozdělení s parametry μ a σ^2 , pak výběrový průměr $\bar{X}$ má normální rozdělení s parametry μ a σ^2/n

$$\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n)$$

O rozdělení rozptylu náhodného výběru z $N(\mu; \sigma^2)$

Má-li populace normální rozdělení s parametry μ a σ^2 , pak náhodná veličina

$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ sleduje $\chi^2(n-1)$ rozdělení.

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



Matematická statistika a rozdělení parametrů rozdělení III

Podstatná tvrzení pro určení intervalových odhadů parametru normálního rozdělení

O studentovo rozdělení – opakování

Jsou-li U a χ^2 takové nezávislé náhodné veličiny, že $U \sim N(0; 1)$ a $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ a definujeme-li:

$$T = \frac{U}{\frac{\sqrt{\chi^2}}{n}} \sim t(n-1),$$

pak T má studentovo rozdělení o n stupních volnosti.



Intervalový odhad střední hodnoty

populace sledující normální rozdělení – při známém rozptylu

- ▶ Oboustranný intervalový odhad

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} < \mu\right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P\left(\mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Hodnota $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je směrodatná odchylka výběrového průměru a říká se jí **standardní chyba**.
- ▶ Hodnota $\Delta = \frac{s}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$ je **maximální přípustnou chybou** intervalového odhadu střední hodnoty.
- ▶ Přesnost intervalového odhadu (šířka intervalu) pro střední hodnotu závisí přímo na variabilitě a spolehlivosti a nepřímo na rozsahu výběru.



Související otázky s intervalovým odhadem střední hodnoty

populace sledující normální rozdělení – při známém rozptylu

- ▶ vedle vymezení samotného intervalu spolehlivosti je výsledkem jeho šířka, tj. přesnost odhadu $= 2\Delta$,
- ▶ variabilita dat je svým způsobem konstantní, přesnost odhadu lze zvýšit buďto:
 - ▶ zvýšením rozsahu souboru,
 - ▶ snížením spolehlivosti.
- ▶ někdy je předepsána přesnost odhadu prostřednictvím maximální přípustné chyby Δ
 - ▶ nechceme-li přesáhnout jak předepsanou přesnost Δ , tak spolehlivost $1 - \alpha$, nesmí rozsah výběru klesnout pod:

$$n = \left(\frac{\sigma \cdot u_{1-\alpha/2}}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!

- ▶ nechceme-li přesáhnout předepsanou přesnost Δ a nelze-li zvýšit rozsah souboru je spolehlivost odhadu nejvýše:

$$1 - \alpha = 2\Phi\left(\frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1$$



Dvoufázový výběr

Postup určení rozsahu výběrového souboru pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

1. Provedení rozumně velikého výběrového šetření – m ,
2. Vypočtení nutného rozsahu pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

$$n = \left(\frac{\sigma \cdot u_{1-\alpha/2}}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!,

3. Je-li $n \leq m$, je vytvořený výběr dostačující,
je-li $n > m$, je třeba výběr doplnit o $(n - m)$ dodatečných pozorování.



Intervalový odhad střední hodnoty

populace sledující normální rozdělení – při neznámém rozptylu

- ▶ Oboustranný intervalový odhad

$$P \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) < \mu \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P \left(\mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Hodnota $\frac{s}{\sqrt{n}}$ je odhadem směrodatné odchylky výběrového průměru a říká se jí **standardní chyba**.
- ▶ Hodnota $\Delta = \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$ je **maximální přípustnou chybou** intervalového odhadu střední hodnoty.
- ▶ Přesnost intervalového odhadu (šířka intervalu) pro střední hodnotu závisí přímo na variabilitě a spolehlivosti a nepřímo na rozsahu výběru.



Související otázky s intervalovým odhadem střední hodnoty

populace sledující normální rozdělení – při neznámém rozptylu

- ▶ vedle vymezení samotného intervalu spolehlivosti je výsledkem jeho šířka, tj. přesnost odhadu $= 2\Delta$,
- ▶ variabilita dat je svým způsobem konstantní, přesnost odhadu lze zvýšit buďto:
 - ▶ zvýšením rozsahu souboru,
 - ▶ snížením spolehlivosti.
- ▶ někdy je předepsána přesnost odhadu prostřednictvím maximální přípustné chyby Δ
 - ▶ nechceme-li přesáhnout jak předepsanou přesnost Δ , tak spolehlivost $1 - \alpha$, nesmí rozsah výběru klesnout pod:

$$n = \left(\frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(m-1)}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!

- ▶ nechceme-li přesáhnout předepsanou přesnost Δ a nelze-li zvýšit rozsah souboru je spolehlivost odhadu nejvýše:

$$1 - \alpha = 2F\left(\frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{s}\right) - 1$$



Dvoufázový výběr

Postup určení rozsahu výběrového souboru pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

1. Provedení rozumně velikého výběrového šetření – m ,
2. Vypočtení nutného rozsahu pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

$$n = \left(\frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(m-1)}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!

3. Je-li $n \leq m$, je vytvořený výběr dostačující,
je-li $n > m$, je třeba výběr doplnit o $(n - m)$ dodatečných pozorování.



Intervalový odhad rozptylu populace sledující normální rozdělení

- Oboustranný intervalový odhad

$$P \left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \right) = 1 - \alpha$$

- Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P \left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} < \sigma^2 \right) = 1 - \alpha$$

- Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P \left(\sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)} \right) = 1 - \alpha$$

- Přesnost intervalového odhadu (šířka intervalu) pro rozptyl závisí přímo na variabilitě a rozsahu výběru a nepřímo na spolehlivosti.



Intervalový odhad směrodatné odchylky populace sledující normální rozdělení

- Oboustranný intervalový odhad

$$P \left(\frac{\sqrt{(n-1)} \cdot s}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{\sqrt{(n-1)} \cdot s}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}} \right) = 1 - \alpha$$

- Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P \left(\frac{\sqrt{(n-1)} \cdot s}{\sqrt{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}} < \sigma \right) = 1 - \alpha$$

- Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P \left(\sigma < \frac{\sqrt{(n-1)} \cdot s}{\sqrt{\chi_{\alpha}^2(n-1)}} \right) = 1 - \alpha$$

- Přesnost intervalového odhadu (šířka intervalu) pro rozptyl závisí přímo na variabilitě a rozsahu výběru a nepřímo na spolehlivosti.



Intervalový odhad populační pravděpodobnosti (poměru) alternativního rozdělení

- ▶ Oboustranný intervalový odhad

$$P \left(p - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \pi < p + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený zdola (levostranný)

$$P \left(p - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \pi \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Jednostranný interval omezený shora (pravostranný)

$$P \left(\pi < p + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

- ▶ Hodnota $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ je odhadem směrodatné odchylky výběrového poměru.
- ▶ Hodnota $\Delta = u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ je **maximální přípustnou chybou** intervalového odhadu populačního poměru.
- ▶ Přesnost intervalového odhadu (šířka intervalu) pro populačního poměru závisí přímo na variabilitě a spolehlivosti a nepřímo na rozsahu výběru.



Související otázky s intervalovým odhadem populační pravděpodobnosti I

- ▶ vedle vymezení samotného intervalu spolehlivosti je výsledkem jeho šířka, tj. přesnost odhadu $= 2\Delta$,
- ▶ variabilita dat je svým způsobem konstantní, přesnost odhadu lze zvýšit buďto:
 - ▶ zvýšením rozsahu souboru
 - ▶ snížením spolehlivosti
- ▶ někdy je předepsána přesnost odhadu prostřednictvím maximální přípustné chyby Δ
 - ▶ nechceme-li přesáhnout jak předepsanou přesnost Δ , tak spolehlivost $1 - \alpha$, nesmí rozsah výběru klesnout pod:

$$n = \left(\frac{\sqrt{p(1-p)} \cdot u_{1-\alpha/2}}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!



Související otázky s intervalovým odhadem populační pravděpodobnosti II

- ▶ nechceme-li přesáhnout předepsanou přesnost Δ a nelze-li zvýšit rozsah souboru je spolehlivost odhadu nejvýše:

$$1 - \alpha = 2\Phi\left(\frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1$$



Dvoufázový výběr

Postup určení rozsahu výběrového souboru pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

1. Provedení rozumně velikého výběrového šetření – m ,
2. Vypočtení nutného rozsahu pro dosažení předepsané přesnosti a spolehlivosti odhadu

$$n = \left(\frac{\sqrt{p(1-p)} \cdot u_{1-\alpha/2}}{\Delta} \right)^2$$

n nutno zaokrouhlit na nejbližší vyšší cele číslo!

3. Je-li $n \leq m$, je vytvořený výběr dostačující,
je-li $n > m$, je třeba výběr doplnit o $(n - m)$ dodatečných pozorování.

