

Statistika

Testování hypotéz - statistická indukce – Parametrické testy

Roman Biskup

(zapálený) statistik ve výslužbě, aktuálně analytik v praxi ;-)
roman.biskup(at)email.cz

21. února 2012



Obsah

Testování na základě jednoho výběru

- Hodnota p -value

- Testování hypotézy o střední hodnotě normálně rozděleného souboru

- Testování hypotézy o rozptylu normálně rozděleného souboru

- Testování hypotézy o parametru alternativního rozdělení

Testování na základě dvou výběrů

- Testování hypotézy o středních hodnotách normálně rozdělených souborů

- Testování hypotézy o rozptylech

- Testování hypotézy o parametrech alternativního rozdělení

Testování na základě více než dvou výběrů

- Testování hypotézy o shodě středních hodnot

- Testování hypotézy o shodě rozptylů – testy homoskedasticity

- Testy mnohonásobného srovnávání



Testování hypotézy o libovolném parametru rozdělení

Klasický postup

Nechť statistický znak X má v základním souboru přibližně požadované rozdělení.

1. Hypotézy

H_0	H_A	K
$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$K = \{t: t \geq F^{-1}(1 - \alpha)\}$
$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$K = \{t: t \geq F^{-1}(1 - \alpha/2) \vee$ $t \leq F^{-1}(\alpha/2)\}$
$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$K = \{t: t \leq F^{-1}(\alpha)\}$

2. Hladina významnosti: $\alpha, \alpha = 0,1; \mathbf{0,05}; 0,01; 0,001$

3. Volba testového kritéria: $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- ▶ testové kritérium je založeno na odchylce výběrové charakteristiky od hypotetické hodnoty parametru; za platnosti nulové hypotézy a v případě splnění předpokladů testu sleduje určité teoretické rozdělení ($\sim F$).

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $t = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$

6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!



Hodnota p -value

- ▶ Čím vyšší hladina významnosti, tím se zvětšuje/í kritický/é obor/y a tím snažší je zamítnutí nulové hypotézy ve prospěch alternativní.
- ▶ Nejnižší taková hladina významnosti, při které lze ještě zamítnout nulovou hypotézu, se nazývá p -value.
- ▶ Hodnota p -value je tedy „dosaženou hladinou významnosti“.
- ▶ Hodnotu p -value lze na rozdíl od hladiny významnosti (volená před testováním) stanovit až jako výsledek testování.
- ▶ Hodnota p -value konstruovaná pro libovolný test se na rozdíl od hodnoty testového kritéria stává univerzálním prostředkem pro rozhodování o výsledku testování:
 - ▶ testové kritérium se porovnává s kritickou hodnotou – různá ...
 - ▶ hodnotu p -value lze bez ohledu na test srovnávat přímo s hladinou významnosti
 - ▶ Nulová hypotéza se zamítá, když $p\text{-value} \leq \alpha$.
 - ▶ Nulová hypotéza se nezamítá, když $p\text{-value} > \alpha$.



Výpočet hodnoty p -value

- ▶ S ohledem na typ alternativní hypotézy (levo-, pravo-, či oboustrannou) lze z hodnoty testového kritéria vypočítat / zjistit prostřednictvím softwareu / nalézt v tabulkách hodnotu p -value.
- ▶ Nechť testová statistika T sleduje rozdělení F , pak pro konkrétní hodnotu t lze stanovit p -value (značeno jen p) následovně:
 - ▶ $H_A: \theta < \theta_0$ $p = F(t)$
 - ▶ $H_A: \theta \neq \theta_0$ $p = 2(1 - F(|t|))$
 - ▶ $H_A: \theta > \theta_0$ $p = 1 - F(t)$
- ▶ Náročnost výpočtu p -value obvykle zvládne software, zatímco stanovení kritické hodnoty zůstává na testujícím.
- ▶ Existuje-li více alternativních hypotéz je třeba vědět, ke které z nich je p -value vypočítáno (obvykle p -value příslušné oboustranné hypotéze).
- ▶ Modifikace oboustranného p -value:

	Reálné (vypoč.) t	
	$t < 0$	$t > 0$
$H_A : \theta < \theta_0$	$p/2$	$1 - p/2$
$H_A : \theta > \theta_0$	$1 - p/2$	$p/2$
$H_A : \theta \neq \theta_0$	p	p

	Reálné (vypoč.) t	
	$t < 0$	$t > 0$
$t_{\text{hyp}} < 0$	$p/2$	$1 - p/2$
$t_{\text{hyp}} > 0$	$1 - p/2$	$p/2$
$t_{\text{hyp}} \neq 0$	p	p



Testování hypotézy o libovolném parametru rozdělení

Postup s využitím hodnoty p -value

Nechť statistický znak X má v základním souboru přibližně požadované rozdělení.

1. H_0 a H_A
2. Hladina významnosti: α , $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$
3. Volba testu
4. Výpočet testového kritéria a hodnoty p -value (případně modifikace hodnoty vypočtené softwarem v závislosti na H_A)
5. Porovnání p -value s hladinou významnosti a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
6. Zformulovat slovní odpověď!



(Jednovýběrový) u -test

Testování hypotézy o střední hodnotě normálně rozděleného souboru – známý rozptyl σ^2

Nechť statistický znak X má v základním souboru přibližně normální rozdělení ($X \sim N(\mu; \sigma^2)$) se známým rozptylem σ^2 .

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha}\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha/2}\}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$K = \{u: u \leq -u_{1-\alpha}\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$

► $U \sim Z$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$

6. Zjištění zda $u \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!



(Jednovýběrový, studentův) t -test

Testování hypotézy o střední hodnotě normálně rozděleného souboru – neznámý rozptyl

Nechť statistický znak X má v základním souboru přibližně normální rozdělení ($X \sim N(\mu; \sigma^2)$) s neznámým rozptylem odhadnutým prostřednictvím s^2 .

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$K = \{t: t \leq -t_{1-\alpha}(n-1)\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$

► $T \sim t(n-1)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$

6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- Pojmenováno podle WILLIAMA SEALYHO GOSSETA (1876–1937), který publikoval pod pseudonymem „Student“.



??

Testování hypotézy o rozptýlu normálně rozděleného souboru

1. Hypotézy

$H_0:$	$H_A:$	K
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$K = \{\chi^2: \chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$K = \{\chi^2: \chi^2 \geq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \vee \chi^2 \leq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$K = \{\chi^2: \chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2(n-1)\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

► $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

6. Zjištění zda $\chi^2 \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!



??

Testování hypotézy o parametru alternativního rozdělení

Nechť statistický znak X má v základním souboru alternativní rozdělení ($X \sim A(\pi)$) a rozsah výběru je buď $n > \frac{9}{\pi_0(1-\pi_0)}$ nebo $n > \frac{5}{\pi_0}$.

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha}\}$
$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha/2}\}$
$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$	$K = \{u: u \leq -u_{1-\alpha}\}$

2. Hladina významnosti: α 3. Volba testového kritéria: $U = \frac{\frac{n_A}{n} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} \sqrt{n} \left(= \frac{n_A - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} \right)$

- $U \sim Z$ (asymptoticky) za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$ 5. Výpočet testového kritéria: $u = \frac{n_A - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$ 6. Zjištění zda $u \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!



Testování hypotézy o „shodě“ parametrů dvou stejně rozdělených souborů I

Klasický postup

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základním souboru přibližně požadované rozdělení.

1. Hypotézy

	H_0	H_A	K
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$K = \{t: t \geq F^{-1}(1 - \alpha)\}$
$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$K = \{t: t \geq F^{-1}(1 - \alpha/2) \vee$ $T \leq F^{-1}(\alpha/2)\}$
	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$K = \{t: t \leq F^{-1}(\alpha)\}$

2. Hladina významnosti: α , $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$

3. Volba testového kritéria: $T = T(X_{1,1}, \dots, X_{1,n}, X_{2,1}, \dots, X_{2,n})$

- ▶ testové kritérium je založeno na odchylce výběrových charakteristik dvou souborů; za platnosti nulové hypotézy a v případě splnění předpokladů testu sleduje určité teoretické rozdělení ($\sim F$),
- ▶ je různé na základě toho, zda se jedná o závislé nebo nezávislé soubory.



Testování hypotézy o „shodě“ parametrů dvou stejně rozdělených souborů II

Klasický postup

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$
5. Výpočet testového kritéria: $t = T(x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n_2})$
6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď!



Dvouvýběrový u -test I

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – známé rozptyly σ_1^2 a σ_2^2

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$) se známými rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 a jsou nezávislé.

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha}\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha/2}\}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$K = \{u: u \leq -u_{1-\alpha}\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

► $U \sim Z$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$



Dvouvýběrový u -test II

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – známé rozptyly σ_1^2 a σ_2^2

6. Zjištění zda $\mu \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď!



Dvouvýběrový (studentův) t -test pro soubory se shodnými rozptyly I

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_1^2 a s_2^2 a jsou nezávislé. s_1^2 a s_2^2 se přibližně rovnají (viz F -test).

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$K = \{t: t \leq -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s^*} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$

► kde $s^* = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} (= \hat{\sigma}^2)$



Dvouvýběrový (studentův) t -test pro soubory se shodnými rozptyly II

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

► $T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria:
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- Pojmenováno podle WILLIAMA SEALYHO GOSSETA (1876–1937), který publikoval pod pseudonymem „Student“.



Dvouvýběrový (studentův) t -test pro soubory s různými rozptyly I

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (různé)

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_1^2 a s_2^2 a jsou nezávislé. s_1^2 a s_2^2 jsou průkazně odlišné (viz F -test).

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	K
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha}(df)\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$K = \{t: t \geq t_{1-\alpha/2}(df)\}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$K = \{t: t \leq -t_{1-\alpha}(df)\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

- $T \sim t(df)$ (asymptoticky) za platnosti nulové hypotézy, kde



Dvouvýběrový (studentův) t -test pro soubory s různými rozptyly II

Testování hypotézy o středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (různé)

$$\blacktriangleright df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- Pojmenováno podle WILLIAMA SEALYHO GOSSETA (1876–1937), který publikoval pod pseudonymem „Student“.



Párový (studentův) t -test I

Testování hypotézy o středních hodnotách závislých normálně rozdělených souborů

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$) a jsou závislé – tvoří napříč skupinami logické páry.

1. Hypotézy

H_0 :	H_A :	H_0 :	H_A :
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\mu_d \leq 0$	$\mu_d > 0$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_d = 0$	$\mu_d \neq 0$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_d \geq 0$	$\mu_d < 0$

2. Hladina významnosti: α

3. Výpočtem diferencí $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ pro $i = 1, \dots, n$ se převede situace na jednovýběrový t -test s nulovou hypotézou $\mu_d = 0$.

- ▶ Je zřejmé, že $n_1 = n_2$, tuto společnou hodnotu označme n .

- ▶ $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$, $s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$, $T = \frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n}$.

4. Dále se pokračuje tak, jako u jednovýběrového t -testu ...



Párový (studentův) t -test II

Testování hypotézy o středních hodnotách závislých normálně rozdělených souborů

Poznámky:

- ▶ Není úplně chybou, pokud se nepoužije párový t -test pro závislé soubory, ale příslušný dvouvýběrový t -test. Dvouvýběrový t -test je však slabší!
- ▶ Pojmenováno podle WILLIAMA SEALYHO GOSSETA (1876–1937), který publikoval pod pseudonymem „Student“.



F-test I

Testování hypotézy o rozptylech normálně rozděleného souboru

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$) s neznámými rozptily odhadnutými prostřednictvím s_1^2 a s_2^2 a jsou nezávislé.

1. Hypotézy

	$H_0:$	$H_A:$	K
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$K = \{F: F \geq F_{1-\alpha}(n_1 - 1; n_2 - 1)\}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$K = \{F: F \geq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1; n_2 - 1) \vee$ $F \leq F_{\alpha/2}(n_1 - 1; n_2 - 1)\}$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$K = \{F: F \leq F_{\alpha}(n_1 - 1; n_2 - 1)\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

► $F \sim F(n_1 - 1; n_2 - 1)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$

5. Výpočet testového kritéria: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$



F-test II

Testování hypotézy o rozptylech normálně rozděleného souboru

6. Zjištění zda $F \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď! ...

Poznámky:

- ▶ Obvyklý postup volby „pořadí souborů“: $s_1^2 \geq s_2^2$ – zjednodušení ověření zda $F \in K$
- ▶ Test je citlivý na porušení normality dat.



?? |

Testování hypotézy o parametrech alternativního rozdělení nezávislých alternativně rozdělených souborů

Nechť statistické znaky X_1 a X_2 mají v základních souborech alternativní rozdělení ($X_1 \sim A(\pi_1)$ a $X_2 \sim A(\pi_2)$) a jsou nezávislé. $n_1, n_2 > 100$

1. Hypotézy

$H_0:$	$H_A:$	K
$\pi_1 \leq \pi_2$	$\pi_1 > \pi_2$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha}\}$
$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 \neq \pi_2$	$K = \{u: u \geq u_{1-\alpha/2}\}$
$\pi_1 \geq \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$	$K = \{u: u \leq -u_{1-\alpha}\}$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $$U = \frac{\frac{n_{1A}}{n_1} - \frac{n_{2A}}{n_2}}{\sqrt{p^*(1-p^*) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

- ▶ kde $p^* = \frac{n_{1A} + n_{2A}}{n_1 + n_2}$
- ▶ $U \sim Z$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \dots$



?? II

Testování hypotézy o parametrech alternativního rozdělení nezávislých alternativně rozdělených souborů

5. Výpočet testového kritéria:
$$u = \frac{\frac{n_{1A}}{n_1} - \frac{n_{2A}}{n_2}}{\sqrt{\frac{n_{1A} + n_{2A}}{n_1 + n_2} \left(1 - \frac{n_{1A} + n_{2A}}{n_1 + n_2}\right) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$
6. Zjištění zda $u \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď!



Testování hypotézy o „shodě“ parametrů více než dvou stejně rozdělených souborů

1. Hypotézy: $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ $H_A: \text{non}H_0 \ (\neg H_0)$
2. Hladina významnosti: $\alpha, \alpha = 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$
3. Volba testového kritéria: $T = T(Y_{11}, \dots, Y_{ij}, \dots, Y_{kn_k}), i = 1, \dots, k \text{ a } j = 1, \dots, n_i$
4. Vymezení kritického oboru: K
5. Výpočet testového kritéria: $t = T(y_{11}, \dots, y_{kn_k})$
6. Zjištění zda $t \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď, v případě platnosti H_A pokračovat v analýze pro jednotlivé soubory!



Jednofaktorová analýza rozptylu – ANOVA I

Testování hypotézy o shodě středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými shodnými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé.

1. Hypotézy: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k (= \mu)$ $H_A: \text{non}H_0 (\neg H_0)$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $F = \frac{s_x^2}{s_r^2} = \frac{MSS_A}{MSS_r}$

$$\blacktriangleright s_x^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_\bullet)^2$$

..... rozptyl mezi skupinami

$$\blacktriangleright s_r^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

..... rozptyl uvnitř skupin (reziduální rozptyl)

$\blacktriangleright F \sim F(k-1; n-k)$ za platnosti nulové hypotézy



Jednofaktorová analýza rozptylu – ANOVA II

Testování hypotézy o shodě středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{F : F \geq F_{1-\alpha}(k-1; n-k)\}$

5. Výpočet testového kritéria:
$$F = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{\bullet})^2}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}$$

6. Zjištění zda $F \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď, v případě platnosti H_A pokračovat v analýze pro jednotlivé soubory!



Jednofaktorová analýza rozptylu – poznámky I

Testování hypotézy o shodě středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými shodnými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé.

1. ANOVA nebo dvouvýběrový t -test ($k = 2$)?

- ▶ $+/-$ jedno (F je v tomto případě druhou mocninou příslušného t)

2. ANOVA nebo $\binom{n}{2}$ dvouvýběrových t -testů ($k > 2$)?

- ▶ Pravděpodobnost chyby prvního druhu α se kumuluje s použitím každého z nich

3. Variabilitu mezi skupinami lze prokázat jen proti variabilitě uvnitř skupin – viz

$$F = \frac{s_x^2}{s_r^2}$$

4. Regresní model: $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

- ▶ μ – společná střední hodnota, α_i – posunutí i -té skupiny proti společnému průměru, ε_{ij} je náhodná složka s rozdělením $N(0; \sigma^2)$ nezávislá na α_i (= viz homoskedasticita)



Jednofaktorová analýza rozptylu – poznámky II

Testování hypotézy o shodě středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

- ▶ $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

5. Alternativní (volnější) formulace hypotéz jednofaktorové ANOVy:

- ▶ H_0 : Spojitý numerický znak Y nezávisí na nominálním statistickém znaku X (efektu), který je v analýze kódován hodnotami $X_i = i$, pro $i = 1, \dots, k$.
- ▶ H_A : Spojitý numerický znak Y závisí na nominálním statistickém znaku X .

6. Analýza rozptylu: $(Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet}) = (Y_{ij} - \bar{Y}_i) + (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{\bullet})$

- ▶
$$\underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\bullet})^2}_{SS_T} = \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}_{SS_r} + \underbrace{\sum_{i=1}^k n_i \cdot (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{\bullet})^2}_{SS_A}$$
- ▶ $(n-1) \cdot s_c^2 = (n-k) \cdot s_r^2 + (k-1) \cdot s_x^2$

7. Interpretace pevných a náhodných efektů – výpočet stejný, ale

- ▶ pevné efekty – náhodnou (vnitroskupinovou/reziduální) variabilitu přináší jen statistický znak Y .
- ▶ náhodné efekty – na náhodné (reziduální) variabilitě se podílí jak statistický znak Y tak rozdělení do skupin, které je obrazem rozdělení nominálního znaku (X) v populaci.



Jednofaktorová analýza rozptylu – předpoklady a síla testu

Testování hypotézy o shodě středních hodnotách nezávislých normálně rozdělených souborů – neznámé rozptyly (shodné)

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými shodnými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé.

► Předpoklady

- Robustnost k narušení normality stoupá s počtem pozorování ve skupině – ovlivňuje experimentátor
- Robustnost k narušení homoskedasticity výrazně klesá při nevyvážených počtech ve skupinách – ovlivňuje experimentátor

► Síla testu

- Roste s odchylkou od H_0 – neovlivňuje experimentátor
- Roste s počtem pozorování ve skupině – ovlivňuje experimentátor
- Roste s vyrovnaností/vyvážeností skupin – ovlivňuje experimentátor (pevné efekty)
- Klesá s počtem skupin – ovlivňuje experimentátor



Bartlettův test test na shodu rozptylů I

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé.

1. Hypotézy: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ $H_A: \text{non}H_0 (\neg H_0)$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $B = \frac{\ln 10}{C} \left[(n - k) \cdot \log s_c^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot \log s_i^2 \right]$

► kde $C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right]$

► $B \sim \chi^2(k-1)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{B: B \geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1)\}$

5. Výpočet testového kritéria:

$$B = \frac{\ln 10}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right]} \left[(n - k) \cdot \log s_c^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot \log s_i^2 \right]$$



Bartlettův test test na shodu rozptylů II

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

6. Zjištění zda $B \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- ▶ Test je citlivý na porušení normality dat a je poměrně slabý.
- ▶ Pojmenováno podle MAURICEho STEPHENSONa BARTLETTa (1910–2002).



Cochranův C test I

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé. Navíc se musí jednat o vyvážený pokusný plán ($n_1 = \dots = n_2 = n$).

1. Hypotézy: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ $H_A: \text{non}H_0$ ($\neg H_0$)

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $C = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^k s_i^2}$

▶ kde $s_{\max}^2 = \max_{1 \leq i \leq k} s_i^2$

▶ $C \sim C(k; n-1)$ za platnosti nulové hypotézy – tabelováno

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{C: C \geq C_{1-\alpha}(k; n-1)\}$

5. Výpočet testového kritéria: $C = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^k s_i^2}$

6. Zjištění zda $C \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A



Cochranův C test II

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- ▶ Podmínka vyváženého pokusného plánu!
- ▶ Test je citlivý na porušení normality dat.
- ▶ Pojmenováno podle WILLIAMA GEMMELLA COCHRANA (1909–1980).



Hartleyův test I

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé. Navíc se musí jednat o vyvážený pokusný plán ($n_1 = \dots = n_k = n$).

1. Hypotézy: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ $H_A: \text{non}H_0$ ($\neg H_0$)

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $H = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2}$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright s_{\max}^2 &= \max_{1 \leq i \leq k} s_i^2, & s_{\min}^2 &= \min_{1 \leq i \leq k} s_i^2 \\ \blacktriangleright s_{\min}^2 &= \min_{1 \leq i \leq k} s_i^2 \end{aligned}$$

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{H: H \geq H_{1-\alpha}(k; n-1)\}$

5. Výpočet testového kritéria: $H = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2}$

6. Zjištění zda $C \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!



Hartleyův test II

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

Poznámky:

- ▶ Podmínka vyváženého pokusného plánu!
- ▶ Pojmenováno podle HERMANA OTTOa HARTLEYe (1912–1980).



Levenův test I

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ mají v základních souborech přibližně normální rozdělení ($Y_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ pro $i = 1, \dots, k$) s neznámými rozptyly odhadnutými prostřednictvím s_i^2 , $i = 1, \dots, k$, a jsou nezávislé.

1. Hypotézy

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 \quad H_A: \text{non}H_0 \ (\neg H_0)$$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $F = \frac{s_x^2}{s_r^2}$

$$\triangleright R_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|$$

.....rezidua po rozdělení do skupin

$$\triangleright s_x^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \bar{R}_\bullet)^2$$

$$\triangleright s_r^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2$$

$$\triangleright F \sim F(k-1; n-k) \text{ (asymptoticky) za platnosti nulové hypotézy}$$



Levenův test II

Testování hypotézy o shodě rozptylů více jak dvou souborů

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{F: F \geq F_{1-\alpha}(k-1; n-k)\}$

5. Výpočet testového kritéria:
$$F = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{r}_i - \bar{r}_{\bullet})^2}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{r}_{ij} - \bar{r}_i)^2}$$

6. Zjištění zda $F \in K$ a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď!

Poznámky:

- ▶ Test není citlivý na porušení normality dat.
- ▶ Pojmenováno podle HOWARDA LEVENEHO (1914–2003).



Scheffého metoda mnohonásobného srovnávání I

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ splňují předpoklady pro použití ANOVAY.

Navazují na tento test, byla-li zamítnuta nulová hypotéza. Nechť $N = \sum_{i=1}^k n_i$

1. Hypotézy: $H_0: \mu_i = \mu_j$ $H_A: \mu_i \neq \mu_j$, pro $i, j = \text{viz } i \neq j$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $F_S = \frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{s_{\bar{y}_i - \bar{y}_j}}$,

► kde $s_{\bar{y}_i - \bar{y}_j} = \sqrt{s_r^2 \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$

4. Vymezení kritického oboru:

$$K = \left\{ F_s: F_s \geq \sqrt{(k-1) \cdot F_{1-\alpha}(k-1; N-k)} \right\}$$

5. Výpočet testového kritéria: $F_S = \frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{s_{\bar{y}_i - \bar{y}_j}}$

6. Zjištění zda platí nerovnost a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď.



Scheffého metoda mnohonásobného srovnávání II

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Poznámky:

- Pojmenováno podle HANRYho SCHEFFÉho (1907–1977).



(Fisherova, modifikovaná) LSD metoda

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ splňují předpoklady pro použití ANOVAY.

Navazují na tento test, byla-li zamítnuta nulová hypotéza. Nechť $N = \sum_{i=1}^k n_i$

1. Hypotézy: $H_0: \mu_i = \mu_j$ $H_A: \mu_i \neq \mu_j$, pro $i, j =$ viz poznámka

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|$

4. Vymezení kritického oboru:

$$K = \left\{ |\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| \geq t_{1-\alpha/2}(N-k) \sqrt{s_r^2 \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \right\}$$

5. Výpočet testového kritéria: $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$

6. Zjištění zda platí nerovnost a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď.

Poznámky:

- Symboly μ_i a μ_j v tomto testu představují výhradně sousední hodnoty (seřazeno podle velikosti $\bar{y}_{(1)} \leq \bar{y}_{(2)} \leq \dots \leq \bar{y}_{(k)}$).
- LSD = **L**east **S**ignificant **D**ifference



Duncanův test (MRT) I

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ splňují předpoklady pro použití ANOVY. Navazují na tento test, byla-li zamítnuta nulová hypotéza. Navíc se musí jednat o vyvážený pokusný plán ($n_1 = \dots = n_2 = n$).

1. Hypotézy: $H_0: \mu_i = \mu_j$ $H_A: \mu_i \neq \mu_j$, pro $i, j =$ viz poznámka
2. Hladina významnosti: α
3. Volba testového kritéria: $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|$
4. Vymezení kritického oboru: $K = \left\{ |\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| \geq s_r \cdot \sqrt{\frac{n_i + n_j}{2n_i n_j}} \cdot q_\alpha(p; n - k) \right\}$
 - ▶ kde $q_\alpha(p; n - k)$ je kritická hodnota studentizovaného rozpětí
 - ▶ Pro výpočet se průměry seřadí podle velikosti a postupně se dosazují do výše uvedeného vzorce. Počet průměrů, které leží v uspořádané řadě mezi právě počítanými průměry $\bar{y}_i$ a $\bar{y}_j$ určuje hodnotu p .
5. Výpočet testového kritéria: $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$
6. Zjištění zda platí nerovnost a rozhodnutí: H_0 vs. H_A
7. Zformulovat slovní odpověď.



Duncanův test (MRT) II

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Poznámky:

- ▶ MRT = **M**ultiple **R**ange **T**est
- ▶ Pojmenováno podle DAVIDA B. DUNCANA (1916–2006).



Tukeyův HSD test

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ splňují předpoklady pro použití ANOVY. Navazují na tento test, byla-li zamítnuta nulová hypotéza. Navíc se musí jednat o vyvážený pokusný plán ($n_1 = \dots = n_2 = n$).

1. Hypotézy: $H_0: \mu_i = \mu_j$ $H_A: \mu_i \neq \mu_j$, pro $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $t_s = \frac{|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|}{s_r} \cdot \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}}$

4. Vymezení kritického oboru: $K = \{t_s : t_s \geq q_\alpha(k; n - k)\}$
 ▶ kde $q_\alpha(k; n - k)$ je kritická hodnota studentizovaného rozpětí

5. Výpočet testového kritéria: $t_s = \frac{|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|}{s_r} \cdot \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}}$

6. Zjištění zda platí nerovnost a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď.

Poznámky:

▶ HSD = **H**onestly **S**ignificant **D**ifference

▶ Pojmenováno podle JOHNa WILDERA TUKEYe (1915–2000).



Bonferroniho metoda mnohonásobného porovnávání

Následné testování hypotézy o shodě středních hodnot dvou nezávislých souborů

Nechť statistické znaky $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ splňují předpoklady pro použití ANOVY. Navazují na tento test, byla-li zamítnuta nulová hypotéza.

1. Hypotézy: $H_0: \mu_i = \mu_j$ $H_A: \mu_i \neq \mu_j$, pro $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$

2. Hladina významnosti: α

3. Volba testového kritéria: $T = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{s_r} \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}}$

► kde $s_r = \sqrt{\frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}$

► $T \sim t(n - k)$ za platnosti nulové hypotézy

4. Vymezení kritického oboru: $K = \left\{ t: |t| \geq t_{1-\alpha/(k)}(n - k) \right\}$

5. Výpočet testového kritéria: $t = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{s_r} \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}}$

6. Zjištění zda platí nerovnost a rozhodnutí: H_0 vs. H_A

7. Zformulovat slovní odpověď.

Poznámky:

► Pojmenováno podle CARLO EMILIOA BONFERONNIHO (1892–1960).

