



Matematika II

Lineární diferenciální rovnice

RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Lineární diferenciální rovnice

Definice a věta. Necht' $p(x), q(x)$ jsou funkce.

Diferenciální rovnici $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ nazýváme **lineární diferenciální rovnicí 1. řádu s pravou stranou**.

Je-li $q(x) = 0 \dots$ **lineární diferenciální rovnice 1. řádu bez pravé strany**.

Je-li $P(x)$ primitivní funkce k $p(x)$ v nějakém intervalu I , pak:

(1) obecné řešení rovnice bez pravé strany má tvar

$$y = C \cdot e^{-P(x)}, C \in R.$$

(2) obecné řešení rovnice s pravou stranou má tvar

$$y = C \cdot e^{-P(x)} + r(x), C \in R, \text{ kde } r(x) \text{ je libovolné partikulární řešení rovnice s pravou stranou na } I.$$

Příklady

Najděte obecné řešení LDR:

(a) $y' + y \cdot \cos x = 0$, (b) $y' + 2xy = 0$

Příklad

Najděte řešení LDR: $y' + 2xy = x$

metoda variace konstanty:

Lineární diferenciální rovnice s konst. koef. 1. a 2. řádu

Definice a věta. Necht' $q(x)$ je funkce; $a, b, c, p \in R$, $a \neq 0$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty 1. a 2. řádu s pravou stranou (resp. bez pravé strany):

- 1. řád: $y' + p \cdot y = q(x)$, resp. $y' + p \cdot y = 0$
- 2. řád: $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = q(x)$, resp. $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

Obecné řešení rovnice 1. řádu je: $y = C \cdot e^{-px}$,
s pravou stranou: $y = C \cdot e^{-px} + r(x)$

Linerání diferenciální rovnice 2. řádu - postup řešení

1. rovnice bez pravé strany ... sestavíme tzv. **charakteristickou rovnici** $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ s neznámou λ a diskriminantem D :

2. • $D > 0$... 2 reálné kořeny λ_1, λ_2 ... obecné řešení rovnice bez pravé strany:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in R;$$

• $D = 0$... jeden dvojnásobný kořen λ ... obecné řešení rovnice bez pravé strany:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in R;$$

• $D < 0$... komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = u \pm iv$... obecné řešení rovnice bez pravé strany:

$$y = C_1 e^{ux} \cos(vx) + C_2 e^{ux} \sin(vx), \quad C_1, C_2 \in R.$$

3. Obecné řešení rovnice s pravou stranou vznikne z řešení rovnice bez pravé strany - přičtením libovolného partikulárního řešení rovnice s pravou stranou.

Příklad

Najděte řešení LDR: (a) $y'' - 9y = 0$ (b) $y'' + 2y' = 0$

Speciální typy pravých stran

Věta. Necht' lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty 1. nebo 2. řádu má na pravé straně funkci tvaru $q(x) = m(x) \cdot e^{kx}$, kde $m(x)$ je mnohočlen. Potom existuje mnohočlen $M(x)$ stejného stupně jako $m(x)$ tak, že partikulární řešení diferenciální rovnice s pravou stranou má tvar:

- (i) $r(x) = M(x) \cdot e^{kx}$, pokud $y = e^{kx}$ není řešením příslušné rovnice bez pravé strany,
- (ii) $r(x) = x \cdot M(x) \cdot e^{kx}$, pokud $y = e^{kx}$ je řešení příslušné rovnice bez pravé strany (u 2. řádu musí $D > 0$),
- (iii) $r(x) = x^2 \cdot M(x) \cdot e^{kx}$, pro 2. řád, kdy $D = 0$, a přitom je $y = e^{kx}$ řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Speciální typy pravých stran

Najděte řešení LDR:

(a) $y' - 3y = (x - 5)e^x$

(b) $y'' - 4y' = 12x^2 + 3x - 3$

Speciální typy pravých stran

Najděte řešení LDR s počátečními podmínkami:

(a) $y' - 2y = -xe^x, y(0) = 7$ (b) $y'' + 4y' = 15, y(0) = -\frac{1}{4}, y(\frac{\pi}{4}) = 4$

Aplikace diferenciálních rovnic

... vyjádření popisovaného vztahu mezi závisle a nezávisle proměnnou veličinou pomocí diferenciální rovnice

hledaný model ... partikulární řešení splňující počáteční podmínky

někdy je nutno ve výsledném modelu ještě upřesňovat další parametry

Model exponenciálního růstu

vycházejí z předpokladu přímé úměrnosti mezi okamžitou rychlostí nárůstu závisle proměnné a její okamžitou hodnotou:

$$y' = k \cdot y, k > 0 \dots \text{tzv. } \mathbf{růstová\ konstanta}$$

- **růst populací,**
- **spojité úročení** - při této formě úročení s úrokovou mírou r se celková hodnota úročené částky $A(t)$ neustále mění s časem t (v letech od počátku úročícího procesu) podle vztahu $\frac{dA}{dt} = r \cdot A$, tj. $A = C \cdot e^{rt}$. Označíme-li P (principal) výchozí částku účtu, pak budoucí hodnota $A = Pe^{rt}$.

Model exponenciálního růstu

Za 2 roky vzrostl počet obyvatel v populaci ze 600 tis. na 1 800 tis. Pokud dochází k populačnímu růstu za ideálních podmínek, jaká bude velikost populace za dalších 1,5 roku?

Model exponenciálního poklesu

$$y = Ce^{kt}, k < 0, C \in R$$

- **zákon radioaktivního rozpadu** - je-li y_0 počáteční množství radioaktivní látky a t je čas v letech, pak $y(t) = y_0 e^{kt}$ je množství dosud nerozpadlé látky po uplynutí t let. Ke zjištění konstanty k se používá tzv. **poločas rozpadu** T - např. pro uran $^{238}\text{U} \dots 4,5 \cdot 10^9$ let

Model exponenciálního poklesu

Populace ohroženého druhu aljašského soba klesá exponenciálně. Poprvé, když byl tento trend zachycen, byl stav populace 2 500 ks, ale po 10 letech už jen 1 200 kusů. Sestrojte matematický model tohoto jevu.

Modely omezeného exponenciálního růstu

$$y = f(t),$$

kde závisle proměnná má určitou růstovou hranici,
tj. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = M$.

- **logistický růst** - „S“ křivka

Model omezeného exponenciálního růstu

Odvoďte obecný model učení za předpokladu, že úroveň zvládnutí dané dovednosti studentem je měřena veličinou y (např. objem výkonu), přičemž konečný stav úrovně této veličiny je M . V průběhu učení je y funkcí času t , výchozí hodnota ke y_0 . Předpokládejte, že v průběhu celého procesu je okamžitá rychlost učení přímo úměrná rozdílu konečné úrovně M a právě dosažené úrovně, tj. platí $\frac{dy}{dt} = k \cdot (M - y)$.

Model omezeného exponenciálního růstu

Při sestavování modelu šíření infekce v populaci je t čas v týdnech (od počátku) sledování a y vyjadřuje poměrnou velikost zachvácené části populace; je tedy $y = y(t)$. Vyjděte z předpokladu, že okamžitá rychlost populace je přímo úměrná velikosti zasažené a zároveň velikosti nezasažené části populace. Předpokládejte dále, že na počátku sledování je zachváčeno 5% populace a po 2 týdnech 30% populace, tj. $y(0) = 0,05$ a $y(2) = 0,30$.