Matematika II
Určitý integrál

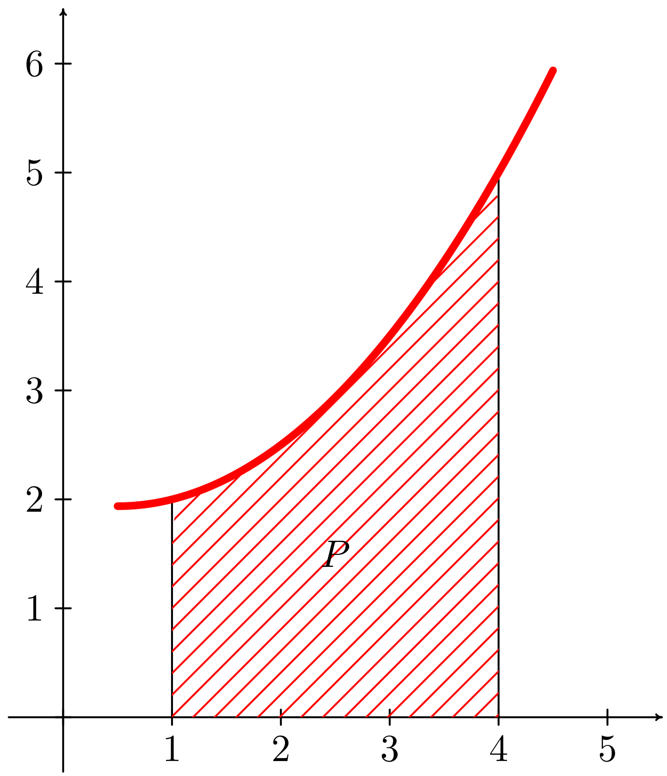
RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Motivace

Je dána funkce $f(x) = 2 + \frac{x^2 - x}{4}$.
Určete co nejpřesněji obsah P obrazce omezeného grafem funkce f a osou x v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$.



Horní a dolní odhady

„vyplnit“ či „překrýt“ určitým počtem obdélníků o základně stejné šířky

1. krok: $d = 1$ ... první odhady:

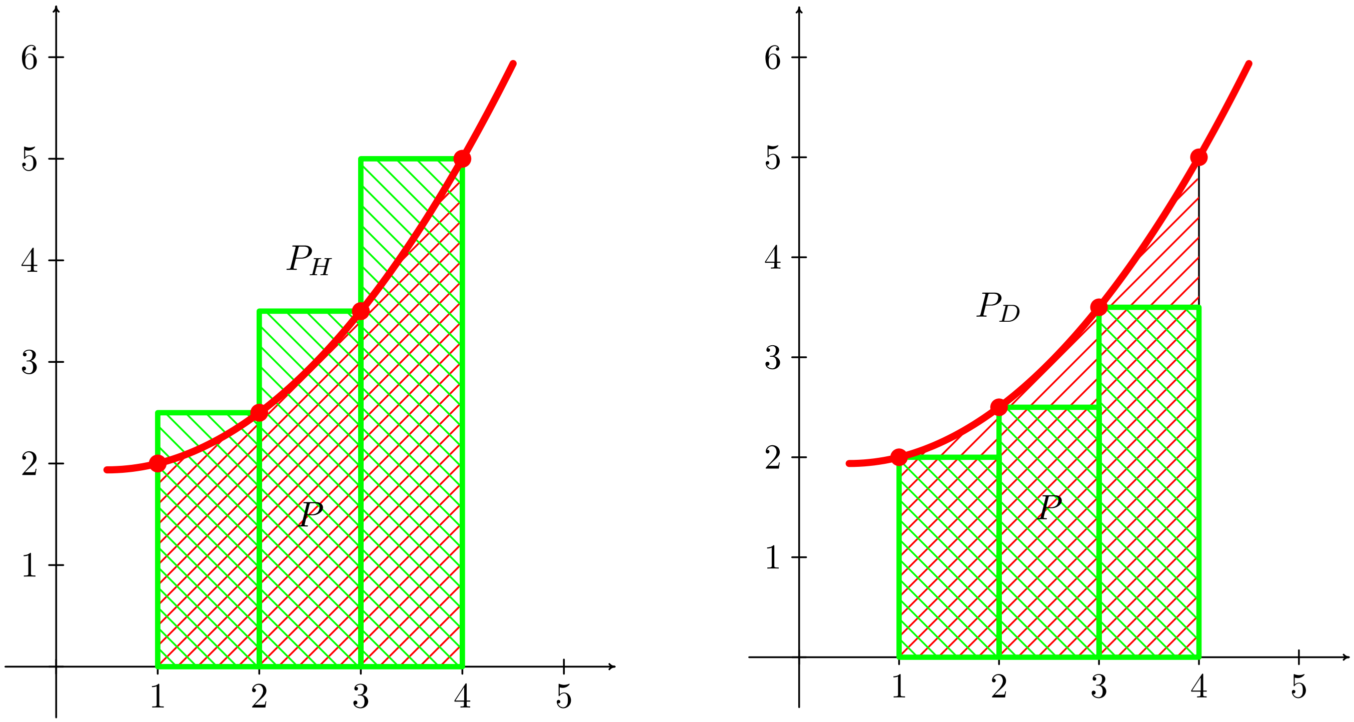
První horní odhad

$$P_1(H) = 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) = \\ = 1 \cdot [f(2) + f(3) + f(4)] = 1 \cdot (2{,}5 + 3{,}5 + 5) = 11$$

První dolní odhad

$$P_1(D) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) = \\ = 1 \cdot [f(1) + f(2) + f(3)] = 1 \cdot (2 + 2{,}5 + 3{,}5) = 8$$

Horní a dolní odhady



První odhad $8 < P_1 < 11$ je poměrně hrubý, proto jej „zjemníme“ - použijeme obdélníky o základně menší šířky, např. 0,5.

druhé odhady:

Druhý horní odhad

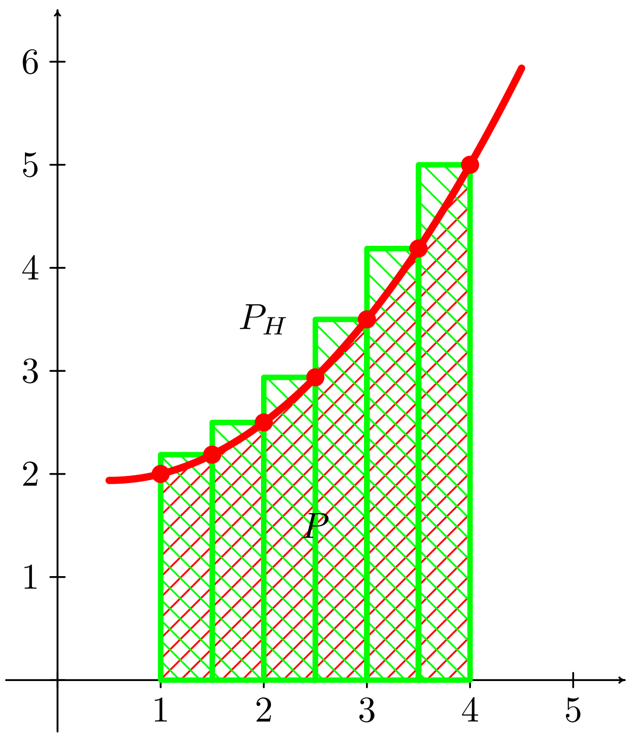
$P_2(H) = 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2) + 0,5 \cdot f(2,5) + 0,5 \cdot f(3) + 0,5 \cdot f(3,5) + 0,5 \cdot f(4) =$
$= 0,5 \cdot [f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5) + f(4)] =$
$= 0,5 \cdot (2,1875 + 2,5 + 2,9375 + 3,5 + 4,1875 + 5) = 10,15625$

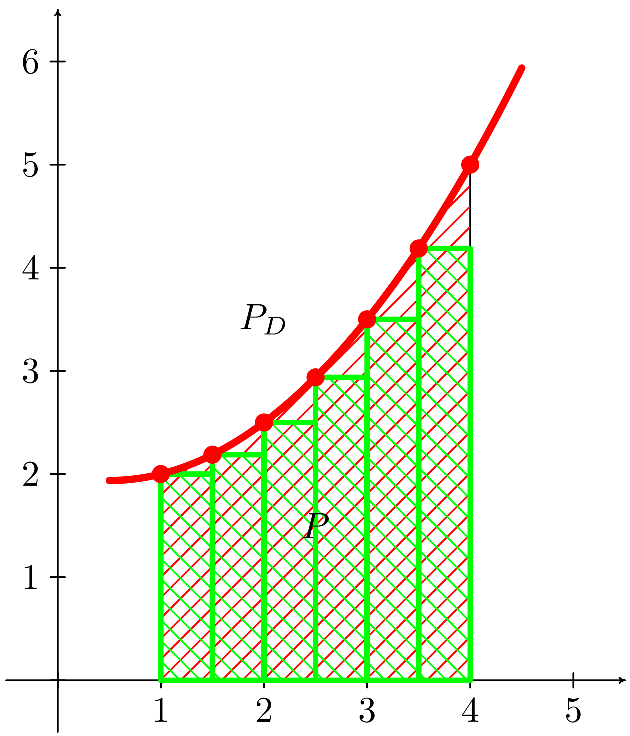
Druhý dolní odhad

$P_2(D) = 0,5 \cdot f(1) + 0.5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2) + 0,5 \cdot f(2,5) + 0,5 \cdot f(3) + 0,5 \cdot f(3,5) =$
$= 0,5 \cdot [f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5)] =$
$= 0,5 \cdot (2 + 2,1875 + 2,5 + 2,9375 + 3,5 + 4,1875) = 8,65625$

Druhý odhad již je o trochu přesnější: $8,65625 < P_2 < 10,15625$

druhé odhady:





Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále. Čím menší šířka základny d, tím více se budeme horními odhady shora a dolními odhady zdola blížit skutečnému obsahu daného obrazce.

Limitní proces

V podstatě se jedná o limitní proces pro $d \to 0$, který vede ke konečnému (přesnému) vyjádření:

$$\lim_{d \to 0} P_H = \lim_{d \to 0} P_D = 9{,}375 \tag{1}$$

Za předpokladu, že funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu je tento postup vždy úspěšný a vede k tzv. **Riemannovu určitému integrálu** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Ke stejnému výsledku vede podle tzv. **Newton-Leibnitzovy formule** i užití primitivní funkce.

Newtonův určitý integrál

Definice a věta. Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom **určitý integrál** funkce f od a do b značíme

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Intervalu $\langle a, b\rangle$ se říká **integrační obor**, číslům a, b po řadě **dolní a horní mez určitého integrálu**.

Je-li funkce f nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, vyjadřuje hodnota určitého integrálu **obsah obrazce ohraničeného shora grafem funkce** f, zdola osou x a ze stran přímkami $x = a$,$x = b$.

Nezávislost Newtonova integrálu na zvolené primitivní funkci

Zápis $[F(x)]_a^b$ v definici Newtonova integrálu je symbolický a definice vysvětluje, že existuje rozdíl $F(b) - F(a)$.

Hodnota tohoto rozdílu není závislá na zvolené primitivní funkci.

Je-li G jiná primitivní funkce k funkci f na stejném intervalu, pak existuje vhodné číslo C tak, že $G(x) = F(x) + C$.

$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) =$$

$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ukázky

$$\int_{-3}^{6} (6 - x^3)\, dx =$$

Ukázky

motivační příklad:

$$\int_1^4 \left(2 + \frac{x^2 - x}{4}\right) dx =$$

Nevlastní integrály

Def.

(i) Nechť funkce f má primitivní funkci na otevřeném intervalu I. Za předpokladu, že uvedená limita existuje, definujeme pro $a \in I$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx$$

Nevlastní integrály

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{u}{u^2+1}\,du =$$

Nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^{1} e^x \, dx =$$

Nevlastní integrály

Má-li funkce f funkci primitivní na $\mathbf{R}$, můžeme též (pokud oba nevlastní integrály konvergují) definovat

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx$$

Nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx =$$

Aplikace určitého integrálu

- obsah obrazce v rovině,
- integrální kritérium,
- objem rotačního tělesa,
- délka rovinné křivky,
- akumulace hodnot a průměrná hodnota proměnné veličiny

Obsah obrazce v rovině

Vypočtěte obsah plochy obrazce mezi grafem funkce $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x v intervalu $\langle -3, 2 \rangle$.

Obsah obrazce v rovině

Vypočtěte obsah plochy obrazce popsaného nerovnostmi
$(y \leq x + 6) \wedge \left(y \geq 2 - \frac{(x+4)^2}{8}\right) \wedge \left(y \geq x^3\right)$.

Integrální kritérium

Věta. Pro spojitou funkci f nezápornou na intervalu $\langle 1, +\infty)$ položme $a_n = f(n)$.

Jestliže $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguje (diverguje), pak také $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

V případě konvergence navíc pro $k > 1, k \in \mathbf{N}$ platí nerovnosti:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1}) + \int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1}) + a_k + \int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$$

Integrální kritérium

Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \frac{\ln t}{t}$.

Objem rotačního tělesa

Věta. Nechť $y = f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Potom objem rotačního tělesa, které vznikne rotací části grafu funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ kolem osy x, je dán vzorcem

$$V = \pi \cdot \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Objem rotačního tělesa

Určete objem tělesa, vzniklého při rotaci kolem osy x grafu funkce $y = 3\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

Délka rovinné křivky

Je-li $y = f(x)$ hladká funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, je délka části jejího grafu v intervalu dána vzorcem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\, dx$$

Délka rovinné křivky

Horní půlkružnice jednotkové kružnice je popsána funkcí $y = \sqrt{1 - x^2}$ v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Určete její délku.

Akumulace hodnot a průměrná hodnota

Nechť spojitá funkce $y = f(t)$ je modelem vyjadřujícím proměnlivou hodnotu sledované proměnné v závislosti na čase v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Jestliže chceme hodnoty $f(t)$ za období $\langle a, b\rangle$ „nasčítat“, tj. naakumulovat, plyne přímo z odvození určitého integrálu Riemannovským způsobem , že tento „součet“ je roven právě $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Střední hodnota proměnné veličiny y v období $\langle a, b\rangle$ je dána vzorcem

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Akumulace hodnot a průměrná hodnota

Společnost dobře investovala a tak v období 2012–2018 očekává růst měsíčních příjmů podle vztahu $g(t) = \sqrt[3]{\frac{t}{12}}$, kde t je čas v měsících počítaný od ledna 2012, $g(t)$ měsíční příjem v miliónech Kč. Odhadněte celkové příjmy za uvedené období.