Matematika I

Nekonečné řady

RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Řada

Def. Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ definujeme **nekonečnou (číselnou) řadu** jako výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

a označujeme symbolem nekonečného součtu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$n-$**tý částečný součet** $\dots s_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$

posloupnost částečných součtů $\dots \{s_n\}$

Jestliže má posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ vlastní nebo nevlastní limitu S, říkáme, že řada **konverguje** nebo že **diverguje** k $\pm\infty$ a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Jinak říkáme, že řada diverguje nebo že nemá součet.

Ukázky

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$ **harmonická řada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$ **geometrická řada**

členy řad mohou tvořit mimo čísel také funkce . . . tzv. **funkční řady**, např.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$ **mocniná (potenční) řada**

Nutná podmínka konvergence

Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, je nutně $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz.

Harmonická řada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ diverguje k ∞.

Příklad 1

Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1$

Nekonečná geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots, \quad a \neq 0$$

- pro $|q| < 1$ má součet $s = \frac{a}{1-q}$,
- pro $q \geq 1$ je divergentní k $\pm\infty$,
- pro $q \leq -1$ nemá součet

Důkaz.

Věta o začátku řady

Nechť k je přirozené číslo. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, právě když je konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$ a pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Důkaz.

Příklad 2

Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 + 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \ldots$

Kombinování konvergentních řad

Jsou dány konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ a číslo $r \in R$. Pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (r a_n) = rA.$$

POZOR! **Analogické pravidlo pro součin nebo podíl neplatí**.

Kritéria konvergence

Srovnávací kritérium

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ se nazývá **majorantou** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže pro každé $n \in N$ je $b_n \geq a_n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se pak nazývá **minorantou** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Pro takové dvě řady s **kladnými členy** platí:

- Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 3

Vyšetřete konvergenci řad (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Kritéria konvergence

Pro každou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy platí:

d'Alembertovo (podílové) kritérium. Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, pak:

1. je-li $L < 1$, je řada konvergentní,
2. je-li $L > 1$, je řada divergentní.

Cauchyovo (odmocninové) kritérium. Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, pak:

1. je-li $L < 1$, je řada konvergentní,
2. je-li $L > 1$, je řada divergentní.

$L = 1$ . . . nelze rozhodnout

Příklad 4

Vyšetřete konvergenci řad

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{5n+1}\right)^n$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$