Matematika I

Vektory a matice

RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Vektory

Def. **Aritmetický vektor** je uspořádaná n-tice reálných čísel.

$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ... n-**složkový vektor** (vektor dimenze n)

nulový n-složkový vektor: $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$

rovnost vektorů: $\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow v_i = w_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Vektory

zápis vektoru:

- řádková forma: $\vec{v} = (-1, 0, 15, -3)$

- sloupcová forma: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$

Základní operace s vektory

Def. Jsou dány dva n-složkové vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$,
$\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a reálné číslo r.
Pak lze definovat následující početní operace s vektory:

- **součet vektorů** $\quad \vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$
- **rozdíl vektorů** $\quad \vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$
- r**-násobek vektoru** $\quad r \cdot \vec{v} = (r \cdot v_1, r \cdot v_2, \ldots, r \cdot v_n)$
- **skalární součin vektorů** $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$
- **norma vektoru** $\quad \|\, \vec{v} \,\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

Kolineární a ortogonální vektory

Def. Dva nenulové n-složkové vektory $\vec{v}, \vec{u}$ nazveme:

- **rovnoběžné (kolineární)** $\Leftrightarrow \exists r \in R : \vec{u} = r \cdot \vec{v}$
- **kolmé (ortogonální)** $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Vektor $\vec{v}$ se nazývá **jednotkový**, jestliže $||\vec{v}|| = 1$.

Každý nenulový vektor $\vec{v}$ je možno **znormovat**, tj. vytvořit z něj jednotkový vektor:

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v}$$

.

Aplikace

- analytická geometrie
  - úhel α dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$: $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$
  - obecná rovnice přímky v rovině: $ax + by + c = 0$,
    kde (a, b) . . . normálový vektor
  - parametrické vyjádření přímky v rovině:
    $$\begin{array}{l} x = a_1 + t \cdot u_1 \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{array},$$
    kde $A[a_1, a_2]$ je zvolený bod přímky a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ směrový vektor, $t \in R$

Aplikace

- ekonomické úvahy

  př. Prodejce objednává od výrobce 6 druhů ložisek, jejichž katalogová čísla jsou po řadě 62052RS, 6310, 22212, 22224, NU308, NJ311.

  Počty kusů dle jednotlivých druhů zapíšeme po řadě do vektoru nákupu $\vec{n} = (1000, 100, 50, 10, 40, 50)$ a vytvoříme vektor cen v Kč $\vec{c} = (56, 112, 938, 1560, 125, 156)$.

  Celková cena objednávky (fakturovaná částka) bude skalární součin $\vec{n} \cdot \vec{c} = 142500$.

  Jakou interpretaci má operace $\frac{1}{2}\vec{n}$? Co musíme udělat, má-li se ke všem cenám přičíst 5%-ní DPH?

Matice

Def. Uspořádané schéma reálných čísel $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

se nazývá **matice** typu $m \times n$ (také typu (m, n)).

a_{ij} ... prvky matice A
i ... řádkový index prvku a_{ij}
j ... sloupcový index prvku a_{ij}

diagonála ... prvky a_{ii}

nulová matice O ... všechny prvky rovny nule

Matice

zápis matice - různé typy závorek - např.:

$$\begin{bmatrix} -1 & 15 & 0 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 15 & 0 \\ 3 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} -1 & 15 & 0 \\ 3 & -9 & 17 \end{Vmatrix}$$

Základní operace s maticemi

Def. Jsou dány dvě matice A, B stejného typu (m, n) a reálné číslo r.

Definujeme následující početní operace:

- **součet matic** $A + B$ ..... $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- **rozdíl matic** $A - B$ ..... $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$
- r**-násobek matice** $r \cdot A$ ... $r \cdot A = (r \cdot a_{ij})$
- **transponování matice** A^T ... výsledkem je matice typu (n, m), kde $a^T_{ij} = a_{ji}$

Zvláštní typy matic

Def. Zvláštní typy matic:

- **čtvercová** ... typu (n, n)
- **symetrická** ... $A = A^T$
- **diagonální** ... prvky ležící mimo diagonálu jsou nulové
- **jednotková** ... diagonální matice, na diagonále samé 1 - značíme E

Součin matic

Def. V matici A typu (m, n):

n-složkový vektor $\vec{a}_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ ... její i-**tý řádkový vektor**

m-složkový vektor $\vec{a}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ ... její j-**tý sloupcový vektor**.

Součin matic

Je-li matice A typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$, pak je definován **součin matic** A a B takto:

$$C = A \cdot B \qquad \text{typu} \quad m \times n$$

$$c_{ij} = \vec{a}_{i*} \cdot \vec{b}_{*j}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m; \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Aplikace

Prodejce vyřizuje objednávky dvou zákazníků na dva druhy ložisek (kat. čísla 6201 a 3305) a dvou druhů klínových řemenů (10x1000 a 13x1120).
První zákazník - pan Zajíc objednává $\vec{n}_1 = (200, 75, 8, 13)$ kusů, druhý zákazník - pan Liška objednává $\vec{n}_2 = (60, 60, 560, 185)$ kusů.
Prodejce uvažuje tři vektory cen:

- základní $\vec{c}_1 = (50, 210, 28, 42)$
- s částečnou výhodou u cen ložisek $\vec{c}_2 = (47, 200, 28, 42)$
- pro stálé zákazníky $\vec{c}_3 = (47, 200, 27, 40)$.

Aplikace

matice objednávek $N = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 75 & 8 & 13 \\ 60 & 60 & 560 & 185 \end{bmatrix}$

matice cen $C = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^T & \vec{c}_2^T & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 47 & 47 \\ 210 & 200 & 200 \\ 28 & 28 & 27 \\ 42 & 42 & 40 \end{bmatrix}$

Součin $N \cdot C = \begin{bmatrix} 26520 & 25170 & 25136 \\ 39050 & 38270 & 37340 \end{bmatrix}$

1. ř. . . . tři alternativy fakturovaných částek pro pana Zajíce pro jednotlivé vektory cen
2. ř. . . . tři alternativy fakturovaných částek pro pana Lišku pro jednotlivé vektory cen