



Matematika I

Relace

RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Kartézský součin

Def. **Kartézským součinem** dvou množin A, B nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$ a zapisujeme

$$A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}$$

Analogicky vytvoříme kartézský součin n neprázdných množin $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_n \in A_n\}$$

Kartézský součin

Vytvořte kartézský součin následujících množin, znázorněte graficky:

- $A = \{1, 2, 5\}, B = \{2, 4\}$
- $M_1 = \langle -1, 2 \rangle, M_2 = \langle 1, 3 \rangle$

Relace

Def. **(Binární) relací** z množiny A do množiny B nazýváme každou podmnožinu σ kartézského součinu $A \times B$ a označujeme $\sigma : A \longrightarrow B$.

Množinu A nazýváme **definičním oborem** této relace, množinu B jejím **oborem hodnot**.

jiná značení:

- $\sigma = \{[x, y] \in A \times B; [x, y] \in \sigma\}$
- $\sigma = \{[x, y] \in A \times B; V(x, y)\}$
- $x\sigma y \dots$ „prvek x je v relaci σ s prvkem y “

Relace

ukázky relací:

Matice sousednosti relace

Ke každé relaci σ sestavujeme matici sousednosti A_σ takto:

- $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow [i, j] \in \sigma$
- $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow [i, j] \notin \sigma$

Počty

Věta o počítání.

Jestliže má konečná množina A p prvků a množina B q prvků, pak:

(a) kartézský součin $A \times B$ má $p \cdot q$ prvků,

(b) počet všech relací z A do B je 2^{pq} ,

(c) počet všech relací z A do B majících právě k dvojic je $\binom{p \cdot q}{k}$

Počty

Příklad: pro množiny A, B určete počet všech relací z A do B a zjistěte, kolik z nich má (v%) 5 prvků (šipek)?

Základní operace s relacemi

Mějme relaci $\sigma : A \rightarrow B$ a relaci $\rho : B \rightarrow C$.

- Jsou-li množiny A_1, B_1 takové, že $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, pak **restrikcí** relace σ na množiny A_1, B_1 rozumíme relaci

$$\sigma|_{A_1, B_1} : A_1 \rightarrow B_1,$$

do níž patří jen ty dvojice $[x, y]$, které patřily do původní relace σ a zároveň $x \in A_1, y \in B_1$.

- **Inverzní relací** k relaci σ rozumíme relaci $\sigma^{-1} : B \rightarrow A$, kde je
$$\sigma^{-1} = \{[y, x]; [x, y] \in \sigma\}$$
- **Složení relací** σ a ρ (v tomto pořadí) míníme relaci z A do C tvořenou všemi dvojicemi $[x, z] \in A \times C$, k nimž existuje aspoň jeden prvek $y \in B$ takový, že $[x, y] \in \sigma$ a zároveň $[y, z] \in \rho$. Tuto složenou relaci zapisujeme $\rho \circ \sigma$ (v opačném pořadí).

Základní operace s relacemi

ukázky:

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

Speciálními a velmi často užívanými typy relací jsou relace na jedné množině.
Def.

Řekneme, že relace σ je relací na množině A , $\sigma : A \rightarrow A$

Relace σ na množině A je

- **reflexivní** $\Leftrightarrow \forall x \in A : [x, x] \in \sigma$;
- **symetrická** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : [x, y] \in \sigma \Rightarrow [y, x] \in \sigma$;
- **antisymetrická** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : [x, y] \in \sigma \wedge [y, x] \in \sigma \Rightarrow x = y$;
- **tranzitivní** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : [x, y] \in \sigma \wedge [y, z] \in \sigma \Rightarrow [x, z] \in \sigma$;
- **ekvivalence** $\Leftrightarrow (\sigma \text{ je reflexivní}) \wedge (\sigma \text{ je symetrická}) \wedge (\sigma \text{ je tranzitivní})$;
- **částečné uspořádání** $\Leftrightarrow (\sigma \text{ je reflexivní}) \wedge (\sigma \text{ je antisymetrická}) \wedge (\sigma \text{ je tranzitivní})$;

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

ukázka:

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

příklady:

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

příklad:

1. Určete počet všech relací na množině $M = \{a, b, c, d\}$
2. Uvažujme na množině M tyto relace:

$$\sigma_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [b, a], [c, d], [d, c]\},$$

$$\sigma_2 = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]\},$$

$$\sigma_3 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [a, c], [b, c]\},$$

$$\sigma_4 = \{[a, b], [b, a], [c, d], [d, c]\}$$

Které z daných relací jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní, ekvivalence či částečné uspořádání?

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

řešení:

Relace na jedné množině a jejich vlastnosti

příklad:

Aplikační oblasti

- doprava
- knihovna
- hodnocení kvality výrobků
- marketing trhu
- biologie
- sociologie, psychologie
- geometrie
- relační databáze